Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio

Wellington da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2013

516.24 Silva, Wellington da
S586e O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio/ Wellington da Silva- Rio Claro: [s.n.], 2013.
91 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: João Peres Vieira

1. Trigonometria. 2. Razões Trigonométricas. 3. Funções Trigonométricas. 4. Círculo Trigonométrico. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Wellington da Silva

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: PERSPECTIVAS DO ENSINO FUNDAMENTAL AO MÉDIO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE/UNESP - Rio Claro

Rio Claro, 22 de outubro de 2013

À minha esposa Michelle que participou de toda esta importante etapa de minha formação, sempre me apoiando e compreendendo a privação da companhia.

Agradecimentos

Meu maior agradecimento é dirigido à minha esposa, pelo contínuo apoio em todos estes anos, ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus valores.

Agradeço também aos meus pais e ao meu irmão por terem contribuído, de forma geral, para minha formação.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão aos meus amigos de turma Ricardo Biazzi e Diego e ao meu grande amigo Éder Ritis Aragão que, de uma forma ou de outra, contribuíram com sua amizade e com disposição para estudarmos até mesmo fora de hora.

No âmbito acadêmico, agradeço a todos os professores e idealizadores do PROFMAT, em especial à Prof. Dra. Suzinei Aparecida S. Marconato pelo bom trabalho desenvolvido durante esse curso e ao meu orientador Prof. Dr. João Peres Vieira por ter aceito a orientação de minha dissertação, na esperança de retribuir, com a seriedade de meu trabalho, a confiança em mim depositada.

Minha esperança é que, compensando o tempo e esforço investidos, algumas das ideias apresentadas aqui venham por ajudar meus colegas de profissão a identificar maneiras adicionais de enriquecer suas posturas e práticas em sala de aula.

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.

Albert Einstein

Resumo

O objetivo deste trabalho é propor uma abordagem no ensino de trigonometria desde o 9° ano do ensino fundamental até o final do ensino médio, respeitando o currículo básico da matemática e o nível de aprofundamento do conteúdo de acordo com a faixa etária dos estudantes. Para isso, são apresentadas atividades para serem aplicadas em sala de aula de modo que os alunos participem da formação e construção do conteúdo com ênfase nas aplicações e nos contextos históricos, contando com o auxílio de softwares matemáticos.

Palavras-chave: Trigonometria, Razões Trigonométricas, Funções Trigonométricas, Círculo Trigonométrico.

Abstract

This study aims at proposing a new approach to the teaching trigonometry starting at 9th grade in elementary school to senior year in high school, taking into account the basic Mathematics syllabus and the degree of difficulty of the topics studied concerning the age group the students belong to. In order to achieve that goal, this study presents activities to be used in classroom so that the students are active in the building and construction of content, emphasizing its real use and its historical context, with the support of mathematical software.

Keywords: Trigonometry, Trigonometric Ratios, Trigonometric Functions, Trigonometric Circle.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O início deste trabalho tem como parâmetro a própria prática do professor autor, Wellington da Silva, permeando a análise e reflexão dessa prática.

De acordo com a experiência profissional do professor tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio, das redes pública e particular, notou-se que o ensino de Trigonometria é visto nas apostilas, muitas vezes, como algo repleto de fórmulas sem significados, que devem ser aplicadas de forma mecânica e repetitiva.

Sendo assim, este trabalho irá ressaltar a importância da assimilação dos significados dos elementos básicos da trigonometria, do seu contexto histórico e de suas aplicações, desde as razões trigonométricas no triângulo retângulo até as funções trigonométricas, ou seja, desde o primeiro contato dirigido do aluno com essa nomenclatura no 9° ano do ensino fundamental, até o aprofundamento dos conceitos e aplicações em cada ano do ensino médio, para que o aluno possa assimilar e compreender esse conteúdo de forma sistemática, lógica e com sentido prático.

Ao observar materiais didáticos sobre o tema, é possível notar que esse conteúdo é abordado de maneira muito expositiva e técnica, sem fundamentação em contextos históricos e aplicações no cotidiano. Sendo assim, será proposta uma abordagem mais dinâmica e contextualizada historicamente, desde os primórdios das civilizações até os dias atuais, uma vez que é válido transitar entre os porquês do surgimento e uso desse conteúdo de acordo com as necessidades de cada época.

Esta dissertação, além deste texto introdutório, apresenta-se organizada da seguinte forma: o segundo capítulo, O ensino de trigonometria no Brasil, descreve a situação atual do ensino de Matemática no Brasil com enfoque na área de trigonometria. Na sequência, o capítulo 3, Introduzindo a trigonometria no ensino fundamental, propõe uma sequência introdutória do conceito de trigonometria no 9° ano, partindo do estudo de semelhança de triângulos e das relações métricas no triângulo retângulo onde, a partir daí, será feita uma abordagem histórica do uso dessas ferramentas. Ainda no capítulo 3 iremos propor uma abordagem por meio de situações-problema práticas para que eles possam ver que o estudo e uso da trigonometria facilita diversas medições, finalizando com uma sistematização dos conceitos que foram trabalhados durante as atividades anteriores. O quarto capítulo, Conhecendo as funções trigonométricas: modelando fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas, versa sobre uma proposta de sequência didática para o 1° ano do ensino médio, de modo que seja feita uma breve revisão histórica e conceitual para que os alunos possam partir para o estudo das funções trigonométricas. Para isso, é necessário que os alunos aprendam a identificar as razões no círculo trigonométrico para que as medidas possam ser transportadas para o plano cartesiano, onde o enfoque é que os alunos sejam capazes de identificar e modelar alguns fenômenos periódicos. Logo, é necessário que seja feita uma abordagem das funções trigonométricas na forma geral para ser possível analisar a função de cada um de seus coeficientes. Para que a investigação da função de cada coeficiente da forma geral das funções trigonométricas seja feita de forma rápida e precisa, é válido propor a manipulação de funções com auxílio de softwares matemáticos que sirvam para esboço de gráficos de funções. Sequencialmente, no capítulo 5, Relações trigonométricas: transformações, equações e inequações, a proposta é para que os alunos do 2^o ano do ensino médio aprendam as relações fundamentais da trigonometria, soma e diferença de arcos, resolvam equações e inequações trigonométricas, saibam aplicar a lei dos cossenos e a lei dos senos, além de participar de suas construções e demonstrações com auxílio de softwares matemáticos. No último capítulo, o sexto, Aprofundamento trigonométrico, propomos que no 3° ano do ensino médio seja feito um aprofundamento e revisão dos conteúdos já trabalhados anteriormente com enfoque nas aplicações, acrescentando o uso da trigonometria no estudo de números complexos. Por fim, encontram-se a Conclusão e Referências.

2 O ensino de trigonometria no Brasil

Neste capítulo discutiremos a respeito de alguns aspectos referentes ao desenvolvimento histórico da trigonometria e do seu ensino. Dessa forma, realçaremos o cuidado com o modo de se abordar a trigonometria nas propostas de ensino de Matemática utilizadas oficialmente nas escolas e nos livros didáticos.

Na primeira metade do século XX, vários educadores matemáticos colocaram em discussão a importância do ensino de trigonometria e as relações dela com a geometria e a álgebra, questionando se o ensino independente desse conteúdo era viável ou não, uma vez que havia uma vertente que afirmava ser um erro muito grave separar a trigonometria e a geometria por exemplo e principalmente ao considerá-la uma parte independente no currículo da matemática ensinada no ensino médio, enquanto outros afirmavam que a trigonometria era um conteúdo específico que deveria ser abordado de forma isolada.

Alguns estudiosos consideravam ainda que tal separação certamente acarretaria a criação de barreiras que dificultariam o conhecimento de poderosos métodos da própria trigonometria, buscaram apoio no fato de que muitas questões de geometria se resolvem de maneira elementar e rápida graças às noções básicas da trigonometria.

Esses matemáticos defendiam a importância da fusão de tópicos a serem abordados nos programas de ensino, para que os estudantes pudessem perceber a relação intradisciplinar de tais tópicos para solucionar quaisquer situações-problema tanto da Matemática quanto de outras disciplinas.

Essa dicotomia acarretou em diferentes interpretações que influenciaram diretamente a produção didática da época que se arrasta até os dias atuais.

No início, alguns livros abordavam a trigonometria elementar e noções de trigonometria esférica, e a proposta era o tratamento da trigonometria como conteúdo isolado dos demais segmentos matemáticos e das demais áreas, não havendo uma preocupação com o desenvolvimento conceitual das noções básicas da trigonometria.

Consequentemente, a trigonometria não era relacionada com os fatos históricos do desenvolvimento da Matemática, como por exemplo o surgimento da trigonometria com os esticadores de cordas e a origem da nomenclatura utilizada (seno, cosseno e tangente), o que poderia facilitar a compreensão do aluno com relação às aplicações desse conteúdo no desenvolvimento das civilizações.

Como herança desse contexto de desenvolvimento do ensino de trigonometria, ainda hoje é muito comum encontrar livros que abordem a trigonometria da seguinte forma:

I- Definição;

Exemplo:

Dado um triângulo ABC retângulo em B, em que o ângulo BAC é igual a α, identificamos seis razões entre os lados de ABC, que denominamos razões trigonométricas de α.

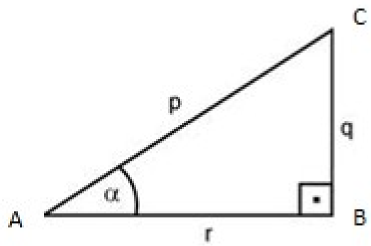

Figura 2.1: Triângulo Retângulo

Tais razões são:

Seno: é a razão entre o cateto oposto q e a hipotenusa p, ou seja, $\text{sen}(\alpha) = q/p$.

Cosseno: é a razão entre o cateto adjacente r e a hipotenusa p, ou seja, $\cos(\alpha) = r/p$.

Tangente: é a razão entre o cateto oposto q e o cateto adjacente r, ou seja, $\text{sen}(\alpha) = q/r$.

As razões denominadas cosecante, secante e cotangente são as respectivas inversas das razões anteriores e denotadas por $\csc(\alpha), \sec(\alpha)$ e $\text{cotg}(\alpha)$.

II- Apresentação da tabela de valores trigonométricos;

Exemplo:

θ °	sin θ	cos θ	tan θ	θ °	sin θ	cos θ	tan θ
0	0.0	1.000	0.0	46	0.719	0.695	1.035
1	0.0175	1.000	0.0174	47	0.731	0.682	1.072
2	0.0349	0.999	0.0349	48	0.743	0.669	1.110
3	0.0523	0.999	0.0524	49	0.755	0.656	1.150
4	0.0698	0.998	0.0699	50	0.766	0.643	1.191
5	0.0872	0.996	0.0874	51	0.770	0.629	1.234
6	0.105	0.995	0.1051	52	0.788	0.616	1.279
7	0.122	0.993	0.1227	53	0.799	0.602	1.327
8	0.139	0.990	0.1405	54	0.809	0.588	1.376
9	0.156	0.988	0.1583	55	0.819	0.574	1.428
10	0.174	0.985	0.1763	56	0.829	0.559	1.482
11	0.191	0.982	0.1943	57	0.839	0.545	1.539
12	0.208	0.978	0.2125	58	0.848	0.530	1.600
13	0.225	0.974	0.2308	59	0.857	0.515	1.664
14	0.242	0.970	0.2493	60	0.866	0.500	1.732
15	0.259	0.966	0.2679	61	0.875	0.485	1.804
16	0.276	0.961	0.2867	62	0.883	0.470	1.880
17	0.292	0.956	0.3057	63	0.891	0.454	1.962
18	0.309	0.951	0.3249	64	0.899	0.438	2.050
19	0.326	0.946	0.3443	65	0.906	0.423	2.144
20	0.342	0.940	0.3639	66	0.914	0.407	2.446
21	0.358	0.934	0.3838	67	0.921	0.391	2.355
22	0.375	0.927	0.4040	68	0.927	0.375	2.475
23	0.391	0.921	0.4244	69	0.934	0.358	2.605
24	0.407	0.914	0.4452	70	0.940	0.342	2.747
25	0.423	0.906	0.4663	71	0.946	0.326	2.904
26	0.438	0.899	0.4877	72	0.951	0.309	3.077
27	0.454	0.891	0.5095	73	0.956	0.292	3.270
28	0.470	0.883	0.5317	74	0.961	0.276	3.488
29	0.485	0.875	0.5543	75	0.966	0.259	3.732
30	0.500	0.866	0.5773	76	0.970	0.242	4.010
31	0.515	0.857	0.6008	77	0.974	0.225	4.331
32	0.529	0.848	0.6248	78	0.978	0.208	4.704
33	0.545	0.839	0.6494	79	0.982	0.191	5.144
34	0.559	0.829	0.6745	80	0.985	0.174	5.671
35	0.574	0.819	0.7002	81	0.988	0.156	6.313
36	0.588	0.809	0.7265	82	0.990	0.139	7.115
37	0.602	0.799	0.7535	83	0.993	0.122	8.144
38	0.616	0.788	0.7812	84	0.995	0.105	9.514
39	0.629	0.777	0.8097	85	0.996	0.0872	11.430
40	0.643	0.766	0.8391	86	0.9976	0.0698	14.300
41	0.656	0.755	0.8692	87	0.9986	0.0523	19.080
42	0.669	0.743	0.9004	88	0.9993	0.0349	28.630
43	0.682	0.731	0.9325	89	0.9998	0.0178	57.280
44	0.695	0.719	0.9656	90	1.0000	0.0000	Infinito
45	0.707	0.707	1.0000				

Figura 2.2: Tabela de Valores Trigonométricos

III- Exercícios para calcular as medidas dos lados de um triângulo retângulo utilizando a tabela de valores trigonométricos anterior;

Exemplo:

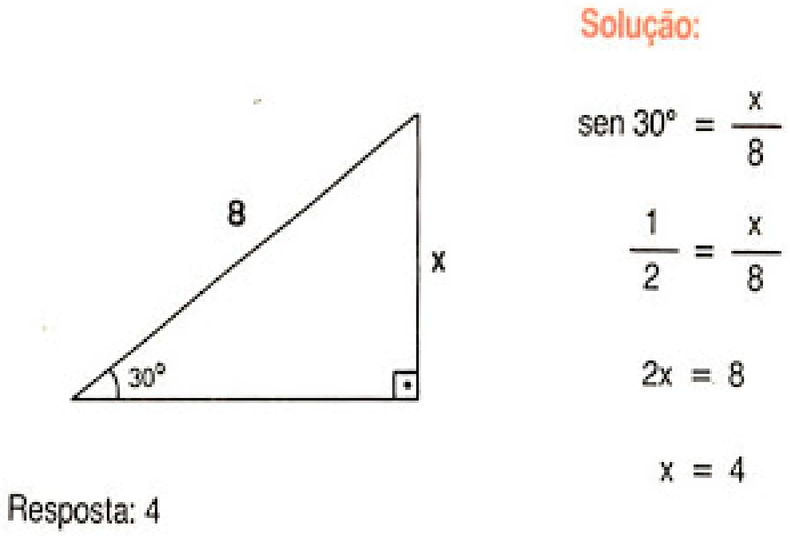

Figura 2.3: Exemplo de Exercício Tradicional

IV- Abordagem de conceitos básicos sobre: arcos, ângulos, unidades de medida na circunferência, comprimento de arco, circunferência trigonométrica, congruência de arcos, funções trigonométricas, estudo dos quadrantes, relações trigonométricas, transformações trigonométricas, equações e inequações trigonométricas e resoluções de triângulos quaisquer.

Quando abordamos o conteúdo da forma supracitada, estamos fazendo uma abordagem didática semelhante ao do início do século XX, onde os alunos eram meros reprodutores de técnicas, uma vez que a necessidade da sociedade era ter pessoas qualificadas para trabalhar de forma mecânica na indústria.

Porém, pensando na sociedade atual, que necessita cada vez mais de pessoas dinâmicas, que não sejam meramente reprodutoras de modelos e pensamentos já estabelecidos, o ensino deve auxiliar na formação de um cidadão que saiba questionar, compreender, aplicar, propor, sistematizar, relacionar, avaliar, inovar e, principalmente, produzir novos conceitos e soluções, de forma rápida, para situações cotidianas que envolvam processos industriais, sociais e políticos. Assim, é notório que essa abordagem mecanicista não contribui de forma satisfatória para essa formação dos cidadãos, que será exigida pelo mercado de trabalho e pela sociedade em geral.

De acordo com os estudos atuais, esse trabalho propõe que o ensino da trigonometria seja abordado com base em contextos históricos associados a questões sócio-econômicas e culturais sobre o assunto, análise etimológica da palavra trigonometria e de sua nomenclatura, introdução por meio da construção dos conceitos das razões trigonométricas enfocando a manipulação e análise de regularidades no triângulo retângulo, análise da construção da tabela de valores das razões trigonométricas, aplicações dessas razões em diversos contextos antigos e atuais, atividades práticas de medição e cálculo de distâncias, abordagem do círculo trigonométrico e análise dos valores assumidos pelas razões trigonométricas em cada quadrante associando a construção e análise das funções trigonométricas por meio de transferência de medidas desse círculo trigonométrico para o plano cartesiano, aplicações da trigonometria na Física com análise de fenômenos periódicos, manipulação dessas funções para levantar hipóteses a respeito das características de cada coeficiente das mesmas, estudo sistemático das razões trigonométricas da soma e diferença de arcos. Dessa forma, o aluno estará participando ativamente em todo o processo de formação e desenvolvimento do conteúdo, respeitando sua maturidade ao longo dos anos. Essa proposta indica pontos que vem sendo investigados e discutidos amplamente, tendo em vista a organização de um corpo de sugestões metodológicas que poderão nortear, de modo geral, não só o ensino de trigonometria, mas o ensino de Matemática como um todo.

3 Introduzindo a trigonometria no ensino fundamental

Nesse capítulo iremos propor uma sequência didática para trabalhar com a trigonometria no 9° ano do ensino fundamental.

É conveniente apresentar alguma situação-problema que envolva um desafio de resolução prática para que os alunos possam discutir e notar que em algumas situações a técnica de medição usual com a trena não é viável ou suficiente para garantir os resultados. Como exemplo disso, veja a situação a seguir:

- A determinação da altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que se evitem turbulências. Sendo assim, como essa altura deve ser medida ou calculada com precisão? Após o levantamento de hipóteses por parte dos alunos de como resolver esse problema, o professor terá um rol de sugestões feitas pelos alunos para medir tal altura, cabendo ao professor iniciar a fundamentação teórica da trigonometria para que eles possam adquirir ferramentas e, posteriormente, rever as propostas iniciais e fazer novas propostas de resolução que possam solucionar tal problema de forma rápida e eficaz. Nesse caso, espera-se que o aluno chegue à conclusão de que utilizando um radar e noções de trigonometria é possível calcular tal altura.

Dando início ao estudo, é necessário trabalhar com a etimologia da palavra Trigonometria e, dessa forma, espera-se que o aluno entenda seu significado: do grego trigōnon "triângulo" + metron "medida".

Seguindo as atividades o professor pode fazer uma explanação do contexto histórico com enfoque nos itens abaixo:

∗ o surgimento da trigonometria: qual a necessidade da civilização que fez com que esse estudo fosse importante e necessário (discutir sobre os esticadores de cordas).

∗ o desenvolvimento da trigonometria: por que o estudo da trigonometria foi aprofundado na parte teórica (discutir a respeito do cálculo de medidas inacessíveis na Astronomia).

∗ quais os acontecimentos, datas e pessoas importantes ligadas ao estudo e desenvolvimento da trigonometria: falar sobre os egípcios, babilônios, hindus, Ptolomeu, Hiparco e Copérnico.

De acordo com Mendes e Fossa (1996, 205):

(...) não há dúvida de que os professores investigados têm bastante interesse em apossar-se do conhecimento da história da matemática, a fim de compreender melhor o desenvolvimento dessa ciência entre nós. Há também grande interesse no uso da história da matemática como um recurso pedagógico, porém, existe uma parcela expressiva de professores que só serão convencidos do seu valor pedagógico mediante a confecção de material eficaz incorporando um ponto de vista histórico.

(...) Outro aspecto conclusivo da investigação nos aponta para o alto grau de desconhecimento dos professores acerca da história dos tópicos matemáticos que são ensinados por eles. Em particular, falta-lhes uma orientação para que busquem esse conhecimento em algumas referências bibliográficas e as transformem em atividades que contribuam para a aprendizagem de seus alunos.

(...) Quando a história é usada no ensino de Matemática ocorre quase sempre nos modelos tradicionais e, por isso, a história não é inserida em uma abordagem eficaz de ensino. Essa prática é fruto da própria formação acadêmica dos professores, cujo objetivo central é a apreensão de um conhecimento matemático formal e estático. Assim, a falta de acesso que o professor tem ao material apropriado existente, dificulta o uso da história da matemática na sala de aula.

(...) O trabalho aponta as áreas de geometria e trigonometria como sendo do interesse principal dos professores pesquisados, embora haja interesse também na história das outras áreas da Matemática ensinada nos primeiro e segundo graus.

Sendo assim, é necessário que o professor faça um estudo detalhado da história da Matemática para que possa trabalhar com segurança em sala de aula.

Após a abordagem histórica, faz-se necessário a discussão a respeito da aplicação atual da trigonometria, sem preocupação com a resolução de questões, com o intuito de mostrar a utilidade desse estudo em diversos ramos. A seguir constam algumas aplicações para serem abordadas:

∗ cálculo do diâmetro da Terra;

∗ cálculo de distâncias entre planetas;

∗ cálculo de distâncias para confeccionar mapas;

∗ cálculo de alturas de montanhas, prédios etc.;

∗ cálculo de larguras de rios;

∗ ajuste de curvas características de acústica, engenharia, eletricidade, informática, medicina etc.

Com essa abordagem espera-se despertar a curiosidade e interesse do aluno com relação ao funcionamento dessas aplicações.

A partir daí, podemos começar a trabalhar e construir os conceitos juntamente com os alunos. Para isso podemos propor a seguinte atividade:

- Primeiramente os alunos devem construir, utilizando régua, compasso e esquadro vários triângulos retângulos semelhantes como na figura a seguir:

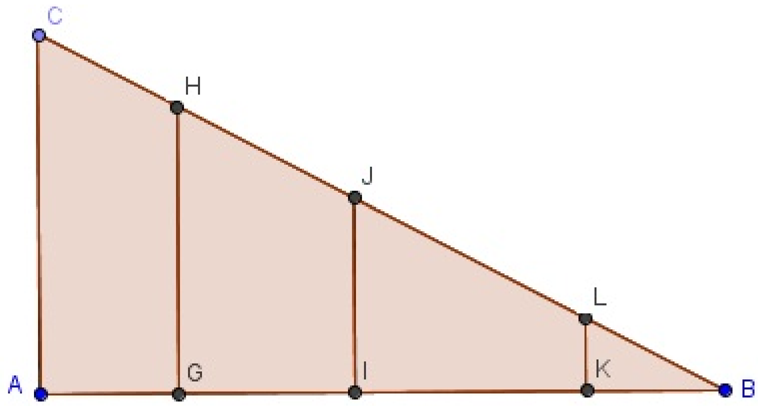

Figura 3.1: Triângulos Retângulos Semelhantes

Em seguida eles devem medir todos os lados e ângulos de todos triângulos e verificar as seguintes igualdades:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{HG}{HB} = \frac{JI}{JB} = \frac{LK}{LB}$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{GB}{HB} = \frac{IB}{JB} = \frac{KB}{LB}$$

$$\frac{CA}{AB} = \frac{HG}{GB} = \frac{JI}{IB} = \frac{LK}{KB}$$

Além disso, os alunos podem fazer uma abordagem baseada nas semelhanças de triângulos.

Certamente os alunos não encontrarão as razões exatamente iguais, pois as medições não são precisas, mas servirá para levantar conjecturas a respeito de uma suposta igualdade. É nesse momento que é válido fazer essas mesmas construções utilizando o software matemático "Geogebra" para que os alunos possam visualizar que as razões de cada item são precisamente iguais, uma vez que o software trabalha com medições exatas.

Após essa atividade é válido que os alunos repitam os mesmos procedimentos, mas agora gerando novos triângulos retângulos a partir de um ângulo KBL diferente do anterior, para que eles notem que as razões continuam constantes em cada item, porém diferentes das dos triângulos anteriores. Sendo assim, eles deverão chegar à conclusão que as razões de cada item são constantes para o mesmo ângulo, mas mudam de acordo com a variação desse ângulo.

Para dinamizar essas construções e manter a precisão das medidas, uma vez que a construção manual acaba gerando pequenos erros, é interessante criar no Geogebra uma manipulação do triângulo retângulo onde o aluno consiga alterar um de seus ângulos agudos ou as medidas de seus lados para que ele possa visualizar a alteração ou igualdade das razões com tal manipulação. Veja a figura a seguir:

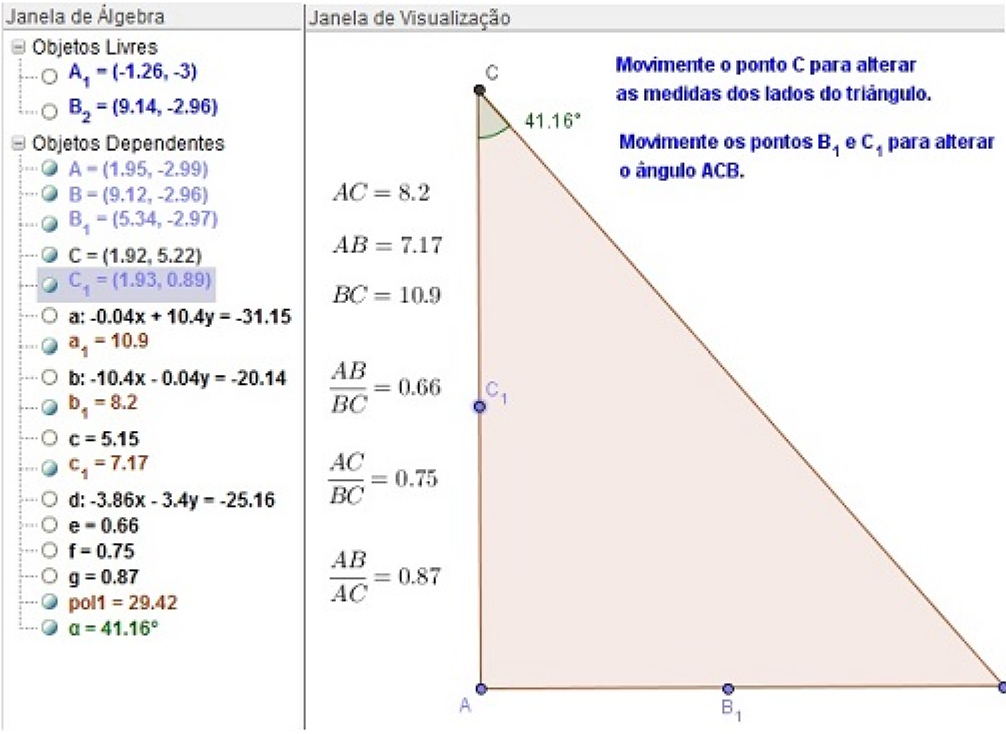

Figura 3.2: Construção do triângulo retângulo no Geogebra

Se pedirmos para o aluno movimentar o ponto B na construção acima, ele construirá novos triângulos com medidas de lados diferentes do anterior, mas mantendo o ângulo ACB, como na figura abaixo:

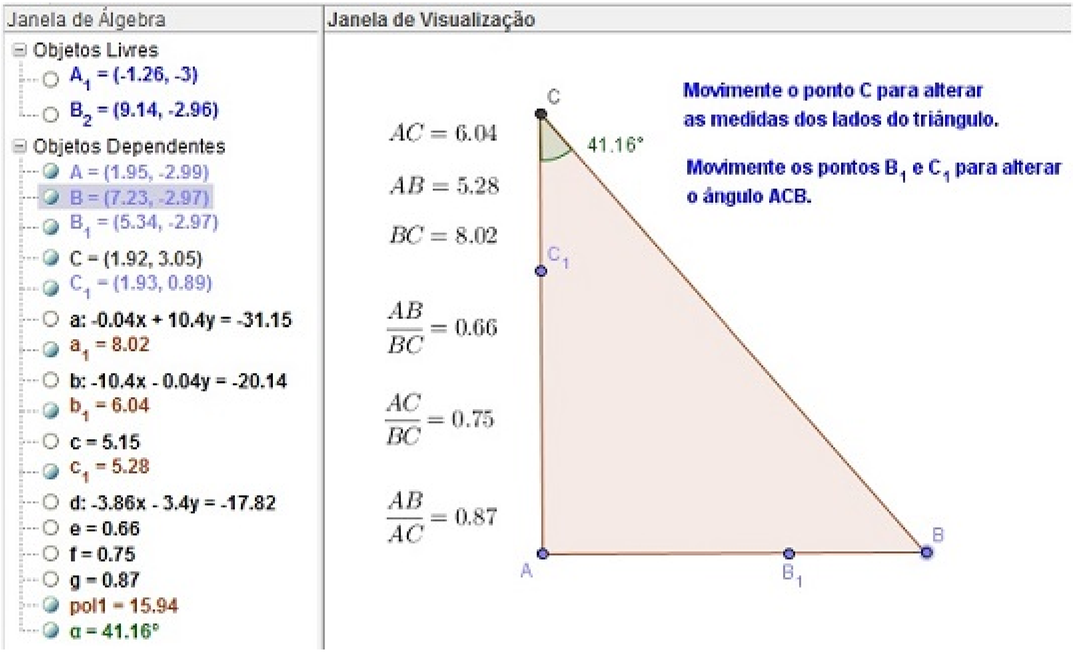

Figura 3.3: Manipulação das medidas dos lados do triângulo retângulo

Com isso, espera-se que o aluno conclua que mesmo alterando as medidas dos lados do triângulo, as razões mantiveram-se constantes com relação ao triângulo anterior, ou seja, esperamos que ele note que as razões são constantes para o mesmo ângulo, mesmo alterando as medidas dos lados do triângulo.

Após essa manipulação é válido fazer com que o aluno movimente os pontos B_1 ou C_1 de modo que a medida do ângulo ACB varie, para que ele possa levantar conjecturas a respeito da relação entre o ângulo e as razões. Veja o exemplo a seguir, onde deslocamos o ponto B_1 e, consequentemente o ângulo ACB foi modificado:

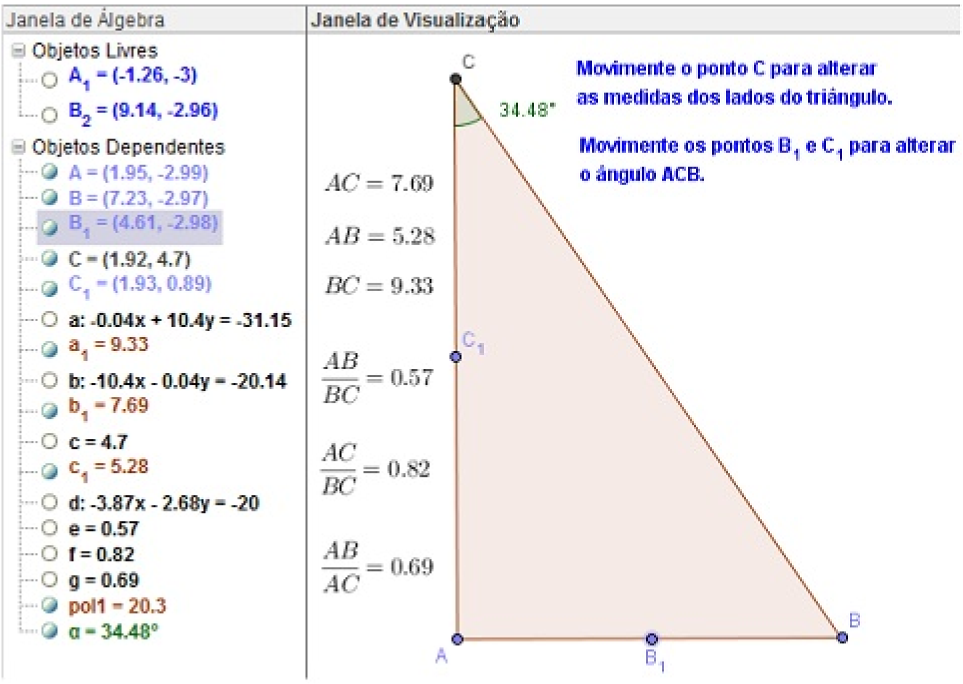

Figura 3.4: Manipulação das medidas dos ângulos agudos do triângulo retângulo

Com isso, espera-se que o aluno conclua que as razões variam de acordo com o ângulo.

Em suma, esperamos que essa atividade faça com que o aluno conclua que se mantivermos o ângulo as razões entre os lados se mantém constantes mesmo variando as medidas desses lados, e que se variarmos o ângulo essas razões também variam.

Sendo assim, o professor pode institucionalizar junto com os alunos todas as observações, para que possa implementar a nomenclatura básica da trigonometria: cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa, seno, cosseno e tangente e verificar que as primeiras razões de cada imagem correspondem ao seno, as segundas ao cosseno e as terceiras à tangente.

Após essa construção das definições básicas o aluno chegará as seguintes relações:

- seno de um ângulo é igual à razão entre o a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa:

$$\text{sen}(a) = CO/HIP;$$

- cosseno de um ângulo é igual à razão entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa:

$$\cos(a) = CA/HIP;$$

- tangente de um ângulo é igual à razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente:

$$\text{tg}(a) = CO/CA.$$

Observação: para facilitar a notação, estamos considerando que CO indica a medida do cateto oposto, CA a medida do cateto adjacente e HIP a medida da hipotenusa.

Dessa forma, já é viável fazer com que o aluno construa alguns triângulos retângulos para compreender o significado dos valores das razões trigonométricas que geralmente são apenas apresentados numa tabela como se surgisse do nada, como na tabela da página 23. Assim, o aluno terá autonomia para estimar tais valores, por meio da construção, sem precisar da tabela pronta. Obviamente que, após essa abordagem, a tabela serve como ferramenta para dinamizar e facilitar a aplicação das razões trigonométricas na resolução de exercícios, mas é importante que o aluno saiba o significado desses valores, para não cair novamente no mecanicismo e reprodução automática de procedimentos.

Nesse momento é válido propor algumas situações-problema que podem ser resolvidas utilizando os conhecimentos desenvolvidos até o momento, como por exemplo questões relacionadas ao cálculo de alturas e distâncias por meio de triângulos retângulos onde são conhecidos a medida de um dos lados e um de seus ângulos agudos, mas tomando o cuidado de não propor apenas o cálculo direto em triângulos já prontos, uma vez que é muito interessante fazer com que o aluno interprete situações, levante hipóteses, faça ilustrações e só depois parta para os cálculos, para que essa situação possa contribuir não só com o desenvolvimento matemático desse aluno, mas que tenha um aspecto de formação geral do raciocínio.

Exemplo de questão: Voltando à questão introdutória de discussão com os alunos, podemos pedir para que eles calculem a altura de uma nuvem que está a 4 quilômetros de distância horizontal de um radar fixado no chão de forma que o ângulo de visada (ângulo entre a linha formada pelo radar e a nuvem e a linha horizontal) é de $42°$, considerando que eles já têm ferramentas suficientes para resolver tal questão.

É válido que várias questões sejam propostas de forma a contemplar o uso das diversas razões trigonométricas não só para calcular medidas dos lados do triângulo, como também calcular as medidas de seus ângulos.

Além disso, vale ressaltar questões que estejam diretamente ligadas com aplicações do cotidiano de engenheiros, pedreiros, bombeiros etc. para que depois eles possam participar de uma atividade prática de cálculo de alturas que será proposta a seguir, considerando que é extremamente relevante a inter-relação de aulas teóricas e práticas, pois estas são referências para o ensino, na medida em que exige do professor um olhar mais atento para que seu aluno aprenda com mais facilidade, pois quando o professor busca fazer algo criativo, o produto de sua criatividade gera oportunidades para que os alunos experimentem e aprendam. De acordo com [1] , “a atividade teórica é prática onde a teoria é que possibilita de modo indissociável o conhecimento da realidade e o estabelecimento de finalidades para sua transformação. Para produzir tal transformação não é suficiente a atividade teórica, é preciso atuar praticamente onde uma completa a outra”.

Vejamos, então, uma atividade prática bastante produtiva com relação à aplicação da trigonometria no cotidiano:

- pedir para que os alunos façam uma pesquisa a respeito de goniômetro, teodolito e instrumentos utilizados em medições;

- após a pesquisa, discutir com os alunos a respeito do uso dessas ferramentas para facilitar medições;

- pedir para que os alunos construam um teodolito utilizando transferidor, laser ou canudinho e elásticos;

- levar os alunos a uma praça para calcularem alturas de postes, árvores e demais objetos verticais que a praça possuir, utilizando o goniômetro, trena e conhecimentos trigonométricos;

- compartilhar os trabalhos de cada grupo com os demais para que possam checar os procedimentos e os resultados;

- pedir para que cada aluno faça um relatório da atividade.

Após todo esse trabalho desenvolvido com os alunos é necessário que o professor faça uma avaliação geral de todas as etapas para que possa analisar e perceber o raciocínio desenvolvido pelo aluno e buscar estratégias e questionamentos que o levem a avançar e aprofundar esse conteúdo na próxima série.

Sendo assim, faz-se necessário que o professor, após todas as atividades de manipulação, formalize os conceitos e faça uma síntese das definições e propriedades.

Definição 3.1. *Triângulo retângulo é o triângulo que possui um ângulo interno reto.*

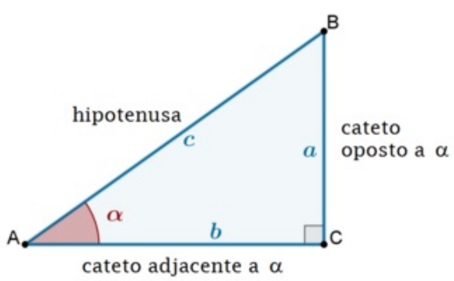

Figura 3.5: Triângulo Retângulo

Teorema 3.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

É importante relembrar esse teorema, pois será muito útil em várias situações posteriores, inclusive em algumas demonstrações.

Pitágoras viveu há 2500 anos e não deixou obras escritas. O que se sabe de sua biografia e de suas idéias é uma mistura de lenda e história real. Acerca de 50 km de Mileto, na ilha Jônia de Samos, por volta de 589 aC. nasceu Pitágoras, que também esteve no Egito e, por desavenças com o tirano Polícrates, de Samos, mudou-se para Crotona ao sul da Península Itálica onde fundou uma sociedade voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática, chamada Escola Pitagórica. Rapidamente, os membros desta sociedade passaram a ver números por toda a parte concluindo que o Universo era regido por uma inteligência superior essencialmente matemática.

Atualmente não há documentos que justifiquem a afirmação de que o Teorema de Pitágoras foi demonstrado pela primeira vez pelos Pitagóricos. Conjectura-se que os membros da mais antiga escola pitagórica conheciam muito bem a geometria dos babilônios, portanto, as idéias básicas do teorema poderiam ter suas origens em outras épocas bem mais remotas. O maior feito teórico dos pitagóricos foi a descoberta dos números irracionais, mas seu mérito máximo consiste em haverem provocado uma verdadeira epidemia de interesse pela matemática, que contagiou a maioria das cidades-estado da Grécia.

Definição 3.2. *Seno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa.*

Definição 3.3. *Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa.*

Definição 3.4. *Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.*

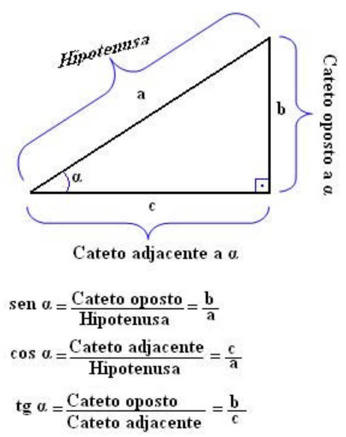

Figura 3.6: Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Das razões trigonométricas num triângulo retângulo e do Teorema de Pitágoras seguem as seguintes relações entre seno, cosseno e tangente:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \text{ quando } \alpha + \beta = 90^\circ$$

3.1 Razões trigonométricas notáveis

Ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Figura 3.7: Razões trigonométricas notáveis

Como aplicação dos conhecimentos adquiridos, podemos utilizar o software Conceitos Fundamentais da Trigonometria, que se encontra acessível em **rived.mec.gov.br /atividades/matematica/mundo_trigonometria/index.html** para trabalhar com as relações trigonométricas do triângulo retângulo, tomando como base para exemplos e aplicações o jogo de bilhar.

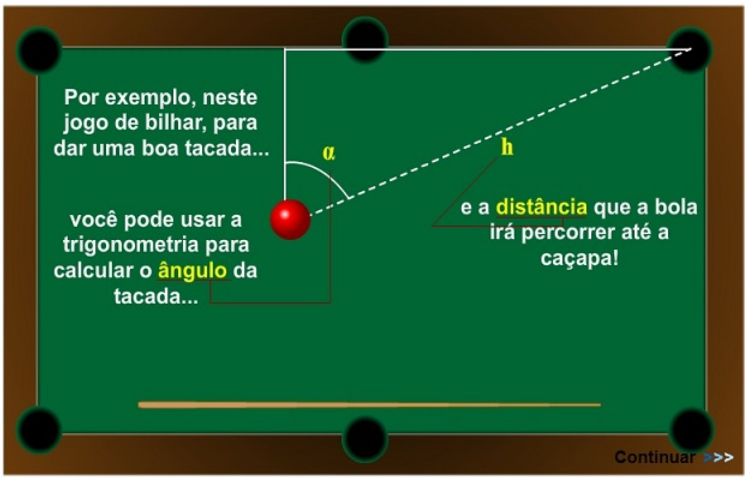

Figura 3.8: Uso do software Conceitos Fundamentais da Trigonometria

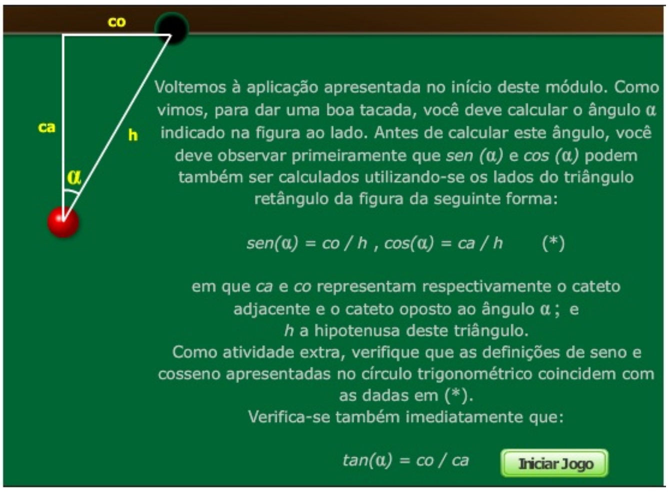

Figura 3.9: Análise da teoria no software

Figura 3.10: Bilhar e trigonometria

Após essa síntese, é recomendável propor aos alunos situações-problema que envolvam esses conhecimentos, tanto na teoria quanto na prática.

Exemplo:

1- Um observador encontra-se na Via Anhanguera em trecho retilíneo e horizontal . De duas posições A e B desse trecho retilíneo e distante 60m uma da outra, o observador vê a extremidade superior de uma torre, respectivamente, sob os ângulos de $30°$ e $31°53'$. O aparelho utilizado para medir os ângulos foi colocado a 1,50m acima da pista de concreto. Determine a altura dessa torre. Dado: $\text{tg}(31°53'') = 0,62$

2- Escolha algum objeto com altura desconhecida (árvore, prédio etc) e, utilizando os conhecimentos trigonométricos, calcule a sua altura.

Materiais: trena, transferidor e calculadora científica.

4 Conhecendo as funções trigonométricas: modelando fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas

Esse capítulo tem por objetivo propor uma abordagem para o estudo de funções trigonométricas do tipo $y = a + b\,\text{sen}(cx + d), y = a + b\cos(cx + d)$ e $y = a + b\,\text{tg}(cx + d)$ com alunos do 1° ano do ensino médio. Para isso recorreremos ao círculo trigonométrico e ao software educacional Geogebra, pois é importante que o aluno conheça os diferentes modelos de funções e que seja estimulado por meio de atividades que permitam a construção do conhecimento. Vale ressaltar as aplicações e a história das funções trigonométricas que podem ser modelos matemáticos de vários fenômenos que se repetem como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, a pressão sanguínea do coração e o nível de água em uma bacia marítima devido à sua periodicidade. Também são periódicos fenômenos como a tensão e a corrente elétrica domésticas, o campo eletromagnético gerado para aquecer comida no microondas, bem como o comportamento ondulatório de notas musicais, fluxo de caixa em negócios sazonais e funcionamento de máquinas rotativas. Ainda pode-se citar como fenômenos periódicos as fases da lua, as estações do ano, o clima, o movimento dos planetas entre outros.

A proposta de trabalho apresentada desenvolve conceitos e gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Tal abordagem do conteúdo dará subsídios para que o aluno construa alguns conceitos como amplitude, translação, período e deslocamento. Dessa forma, espera-se que a sequência de atividades a serem desenvolvidas faça com que o aluno observe e conclua os efeitos determinados pelos coeficientes das funções, em seus respectivos gráficos, por meio do uso do software.

Veremos as funções trigonométricas e algumas famílias destas funções, demonstrando como se pode obter essas noções de alongamento, compressão, translação e reflexão. Para tal, propõe-se uma análise do que ocorre com estas funções quando seus parâmetros são alterados já que, muitas das aplicações em diferentes áreas do conhecimento são modeladas por funções trigonométricas de um dos tipos $y = a + b\,\mathrm{sen}(cx + d), y = a + b\cos(cx + d)$ e $y = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$ sendo a, b, c e d constantes reais. Os gráficos dessas funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente cada gráfico, a partir das funções $y = \mathrm{sen}(kx), y = \cos(kx)$ e $y = \mathrm{tg}(kx)$, respectivamente.

Antes de abordarmos essas funções trigonométricas, precisamos abordar com o aluno as medidas de arcos e ângulos e o círculo trigonométrico, para que ele possa transportar as medidas do círculo para o plano cartesiano e, assim, esboçar os gráficos das funções.

Sendo assim, o aluno deve saber que medir um arco (ou ângulo) é compará-lo com outro, unitário, onde ângulo é a região de um plano concebida pelo encontro de duas semirretas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo . A abertura do ângulo é uma propriedade invariante e é medida em radianos ou graus.

Definição 4.1 (Grau)**.** *Um grau é definido como a medida do ângulo central subentendido por um arco igual a* $1/360$ *da circunferência que contém o arco. (Indica-se* $1°$*).*

Então podemos dizer que uma circunferência (ou arco de uma volta) mede $360°$.

Definição 4.2 (Radiano)**.** *O radiano (notação: rad) é definido como a medida de um ângulo central subentendido por um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco.*

A circunferência toda contém 2π radianos, o que significa que seu comprimento é igual a $2\pi R$ e que a medida dela correspondente ao arco de uma volta. É interessante observar que os egípcios chegaram ao valor aproximado de $3,16$ para o π há 3500 anos partindo de um quadrado inscrito numa circunferência, cujo lado media nove unidades. Eles, então, dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de oito lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência.

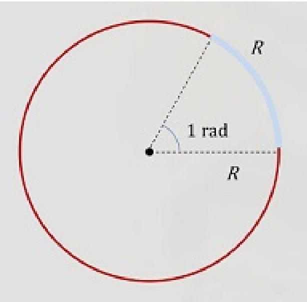

Figura 4.1: Arco e ângulo

Definição 4.3. *O círculo trigonométrico é uma circunferência orientada, com raio unitário, associada a um sistema de coordenadas cartesianas. O centro da circunferência coincide com a origem do sistema cartesiano. Dessa forma, o círculo fica dividido em quatro quadrantes, identificados de acordo com a figura abaixo.*

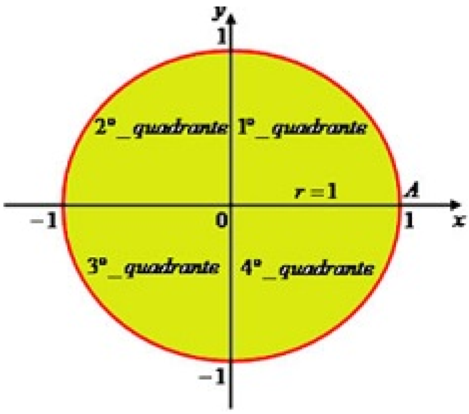

Figura 4.2: Círculo trigonométrico

A circunferência acima definida, com origem em O, é chamada círculo trigonométrico, ciclo trigonométrico ou ainda circunferência trigonométrica.

Se o ponto M sobre a circunferência está associado ao número α que representa o ângulo, dizemos que M é a imagem de α no círculo.

No círculo trigonométrico temos arcos que realizam mais de uma volta, considerando que o intervalo do círculo é $[0, 2\pi]$, por exemplo, o arco dado pelo número real $x = 5\pi/2$, quando desmembrado temos: $x = 5\pi/2 = 4\pi/2 + \pi/2 = 2\pi + \pi/2$. Note que o arco dá uma volta completa ($2\pi = 2.180° = 360°$), mais um percurso de $1/4$ de volta ($\pi/2 = 180°/2 = 90°$). Podemos associar o número $x = 5\pi/2$ ao ponto P da figura, o qual é imagem também do número $\pi/2$. Existem outros infinitos números reais maiores que 2π e que possuem a mesma imagem. Observe:

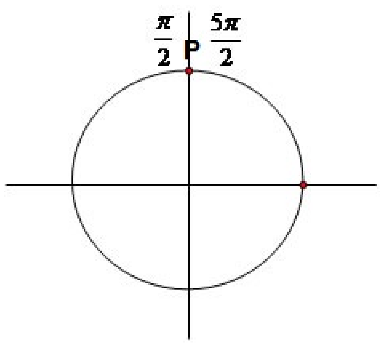

Figura 4.3:

$9\pi/2 = 2voltase1/4devolta$

$13\pi/2 = 3voltase1/4devolta$

$17\pi/2 = 4voltase1/4devolta$

Podemos generalizar e escrever todos os arcos com essa característica na seguinte forma: $\pi/2 + 2k\pi$, onde k é um número inteiro. E de uma forma geral abrangendo todos os arcos com mais de uma volta, $x + 2k\pi$.

Estes arcos são representados no plano cartesiano através de funções circulares como: função seno, função cosseno e função tangente.

Definição 4.4. *Dado um número real α, seja M sua imagem no círculo. Denominamos seno de α (e indicamos $\operatorname{sen}\alpha$) a ordenada y' do ponto M em relação ao sistema xOy.*

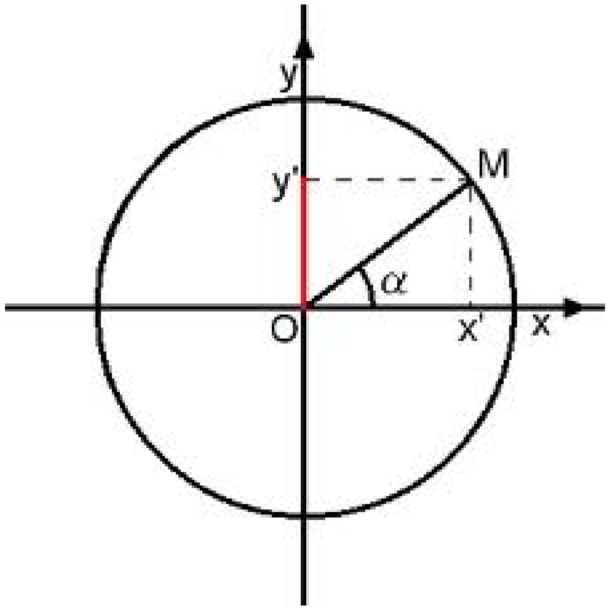

Figura 4.4: Seno no círculo trigonométrico

Observemos que:

1- se $\alpha = 0$, então M coincide com A;

2- se $\alpha > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento α, no sentido anti-horário, e marcamos M como ponto final do percurso.

3- se $\alpha < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|\alpha|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é M.

4.1 Função seno

Definição 4.5. *Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $y' = \operatorname{sen}(x)$, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$*

Propriedades:

Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então sen(x) é positivo;

Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então sen(x) é negativo;

Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então sen(x) é crescente;

Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então sen(x) é decrescente;

A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1];

A função seno é periódica e seu período é 2π, logo temos que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x+2k\pi)$, onde k é número inteiro.

4.1.1 Gráfico da função seno

Construindo um diagrama com x nas abscissas e sen(x) nas ordenadas, podemos construir o gráfico abaixo, denominado senóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \text{sen}(x)$.

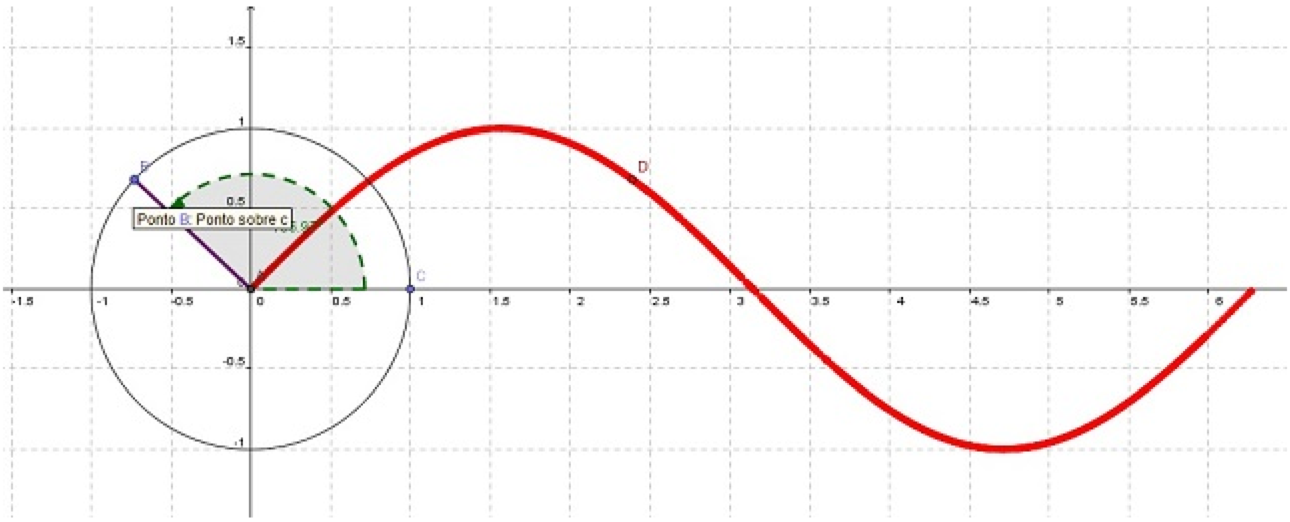

Figura 4.5: Construção do gráfico da função seno com o círculo trigonométrico

Nesse momento é de suma importância que os alunos construam esse gráfico fazendo as medições no círculo trigonométrico com auxílio do compasso e transferindo tais medidas no plano cartesiano para confeccionar o gráfico. Para tanto podemos dividir o círculo trigonométrico em 36 partes (de 10 em 10 graus, ou seja, de $\pi/18$ em $\pi/18$ radianos) e transladar cada medida do seno obtida no círculo para o plano cartesiano.

Observemos que, como o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, a senóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No plano cartesiano anterior está representado apenas um período da função seno.

Definição 4.6. *Dado um número real α, seja M sua imagem no círculo trigonométrico. Denominamos cosseno de α (e indicamos $\cos\alpha$) à abscissa x' do ponto em relação ao sistema xOy.*

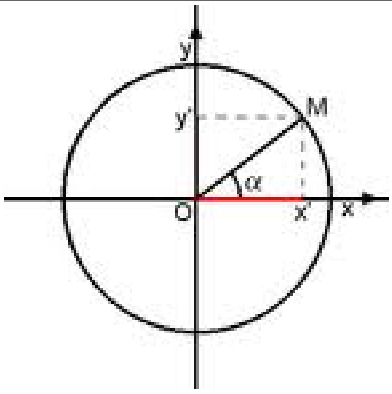

Figura 4.6: Cosseno no círculo trigonométrico

4.2 Função cosseno

Definição 4.7. *Denominamos função cosseno à função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada real* x *o real* $y = \cos(x)$*, ou seja* $f(x) = \cos(x)$*.*

Propriedades:

Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então $\cos(x)$ é positivo;

Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então $\cos(x)$ é negativo;

Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então $\cos(x)$ é decrescente;

Se x percorre o terceiro ou quarto quadrante, então $\cos(x)$ é crescente;

A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$;

A função cosseno é periódica e seu período é 2π. Assim, $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, onde k é número inteiro.

4.2.1 Gráfico da função cosseno

Construindo um diagrama com x nas abscissas e $\cos(x)$ nas ordenadas, podemos construir o gráfico abaixo, denominado cossenóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos(x)$.

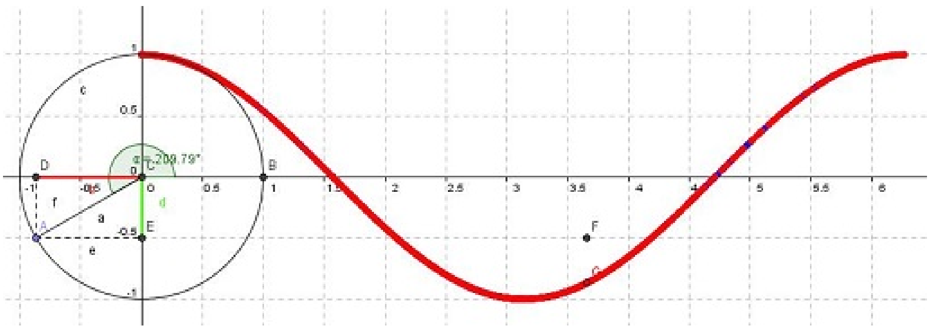

Figura 4.7: Construção do gráfico da função cosseno com o círculo trigonométrico

Analogamente ao processo de construção do gráfico da função seno, os alunos devem construir esse gráfico fazendo as medições no círculo trigonométrico com auxílio do compasso e transferindo tais medidas no plano cartesiano. Novamente pode-se dividir o círculo trigonométrico em 36 partes (de 10 em 10 graus, ou seja, de $\pi/18$ em $\pi/18$ radianos) e transladar cada medida do cosseno obtida no círculo para o plano cartesiano.

A observação agora é que o domínio da função cosseno também é $\mathbb{R}$, e que a cossenóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função cosseno.

Criada por Edmund Gunter, a palavra cosseno surgiu no século XVII como sendo o seno do complemento de um ângulo. Gunter sugeriu combinar os termos "*complemento*" e "*seno*" em co-sinus, que logo foi modificado para cosinus e, em português "*cosseno*". Os conceitos de seno e cosseno tiveram origem nos problemas relativos à Astronomia.

Nesse momento é necessário que o aluno consiga visualizar o gráfico da função cosseno como uma translação do gráfico da função seno, ou seja, que a cossenóide não passa de uma senóide.

Observação: é válido abordar as funções seno e cosseno simultaneamente, considerando o ponto $M = (cos(x), sen(x)$ ou ainda abordar o cosseno como complemento do seno, ou seja, verificar que a função cosseno é do tipo $y = a + b\,\mathrm{sen}(cx + d)$.

Definição 4.8. *Dado um número real θ, θ diferente de $\pi/2 + k\pi$, onde k é número inteiro, seja M sua imagem no círculo. Consideremos a reta OM e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de θ (e indicamos* $\mathrm{tg}(\theta)$*) à medida algébrica do segmento AT.*

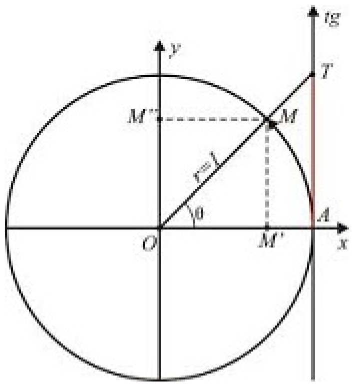

Figura 4.8: Tangente no círculo trigonométrico

4.3 Função tangente

Definição 4.9. *Denominamos função tangente à função $f : D \to R$ que associa a cada número real x, x diferente de $\pi/2 + k\pi$, onde k é número inteiro, o número real dado pela medida de $AT = \mathrm{tg}(x)$, isto é, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.*

Notemos que, para $\theta = \pi/2 + k\pi$, M está no eixo y e, então, a reta OM fica paralela ao eixo das tangentes. Assim, não existe o ponto T e a $\text{tg}(\theta)$ não está definida. Isso também pode ser observado com a impossibilidade de construir um triângulo retângulo com dois ângulos retos.

Propriedades:

Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $\text{tg}(x)$ é positiva;

Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $\text{tg}(x)$ é negativa;

Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, no sentido anti-horário, então $\text{tg}(x)$ é crescente;

Historicamente, a função tangente era a antiga função sombra, que tinha ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na vertical. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto, modificava o tamanho da sombra. Assim, a tangente e a cotangente vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram, inicialmente, associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de sol. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides por meio da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes, por volta do ano de 860. O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583.

4.3.1 Gráfico da função tangente

Construindo um diagrama com x nas abscissas e $\text{tg}(x)$ nas ordenadas, podemos construir o gráfico abaixo, denominado tangentóide, que nos indica a variação da função $f(x) = \text{tg}(x)$.

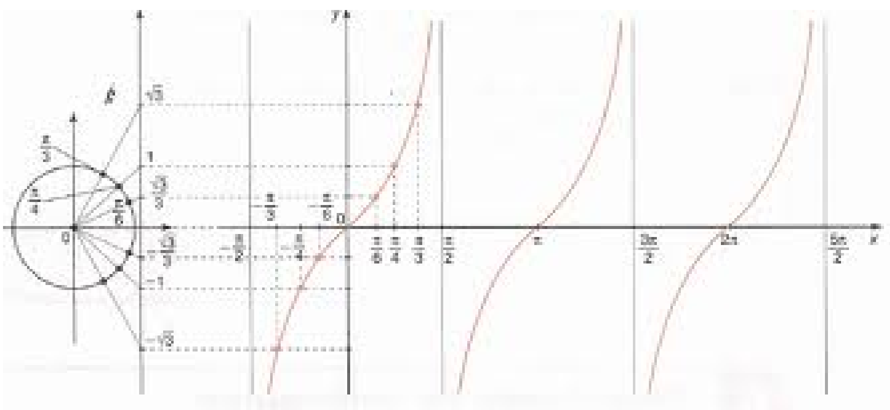

Figura 4.9: Construção do gráfico da função tangente com o círculo trigonométrico

Utilizando o software Graphmatica, os alunos deverão manipular os coeficientes para analisar as mudanças nos gráficos, formando uma família de funções. Espera-se que o aluno compreenda cada alteração sofrida no gráfico ao manipular cada coeficiente.

4.4 Famílias da função seno

A família da função seno é da forma $y = a + b\,\text{sen}(cx + d)$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Vejamos os gráficos:

1- $y = \text{sen}(x)$

2- $y = 2 + \text{sen}(x)$

3- $y = -5 + \text{sen}(x)$

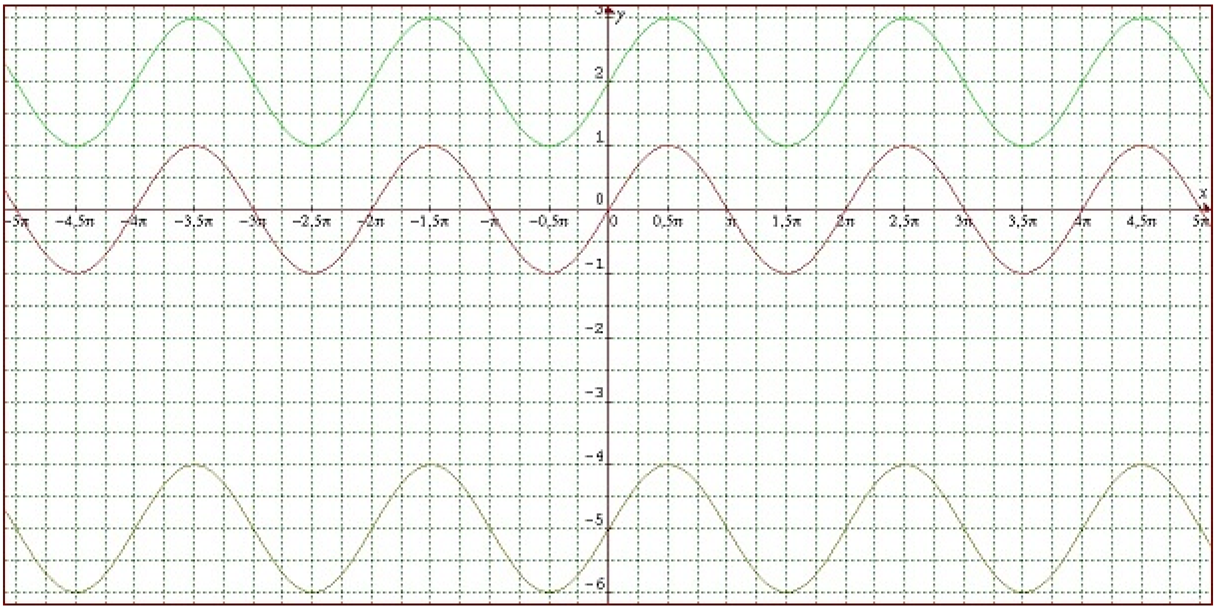

Figura 4.10: Análise do coeficiente "a" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + \text{sen}(x)$

Conclusão: o coeficiente "a" faz com que a função se desloque verticalmente, ou seja, é responsável pela translação vertical.

4- $y = \text{sen}(x)$

5- $y = 2\,\text{sen}(x)$

6- $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}(x)$

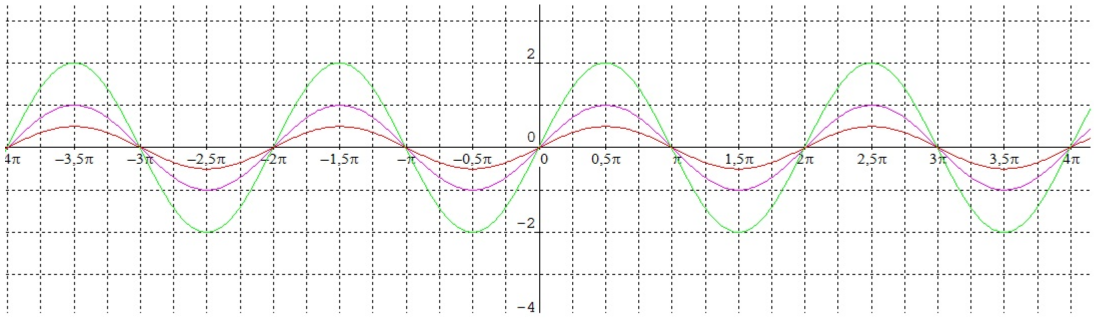

Figura 4.11: Análise do coeficiente "b" na função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = b\,\text{sen}(x)$

Conclusão: o coeficiente "b", em módulo, varia a amplitude da função, comprimindo se reduzirmos o módulo de b e alongando se aumentarmos o módulo de b.

7- $y = \text{sen}(x)$

8- $y = \text{sen}\,2x$

9- $y = \text{sen}\,\frac{1}{2}x$

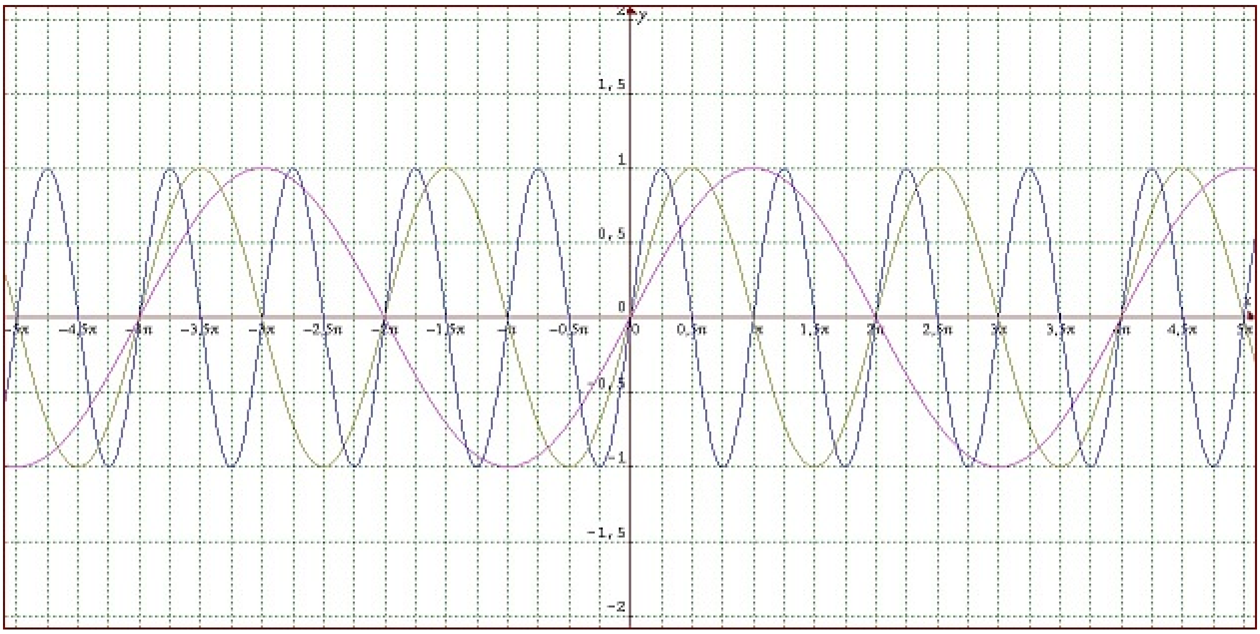

Figura 4.12: Análise do coeficiente "c" na função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = \text{sen}(cx)$

Conclusão: o coeficiente "c", em módulo, varia o período da função, comprimindo se o módulo de c aumenta e alongando se diminuirmos o módulo de c.

10- $y = \text{sen}(x)$

11- $y = \text{sen}(x + \pi)$

12- $y = \text{sen}(x - \pi/2)$

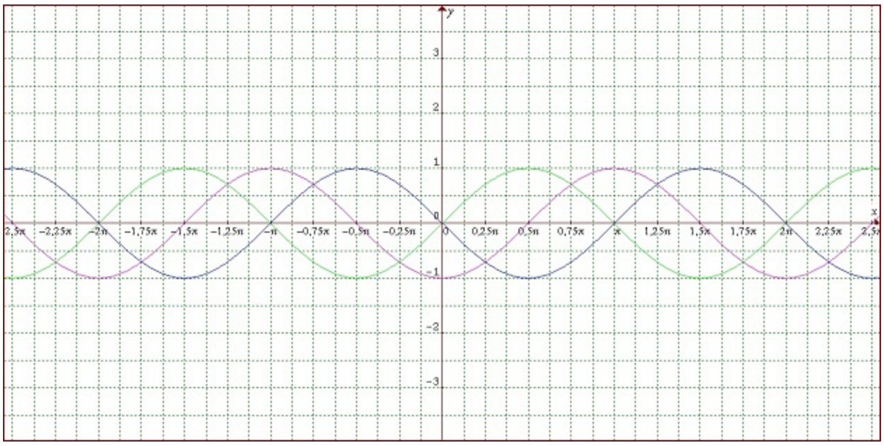

Figura 4.13: Análise do coeficiente "d" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \text{sen}(x + d)$

Conclusão: o coeficiente "d" faz com que a função se desloque, ou translade, horizontalmente.

Após a análise individual dos coeficientes, é relevante que o aluno faça gráficos utilizando vários desses coeficientes e tente verificar regularidades.

Quando $a = 0$:

13- $y = \text{sen}(x)$

14- $y = 2\,\text{sen}(\frac{1}{2}x + 20)$

15- $y = -3\,\text{sen}(2x - 15)$

16- $y = \text{sen}(x - 5)$

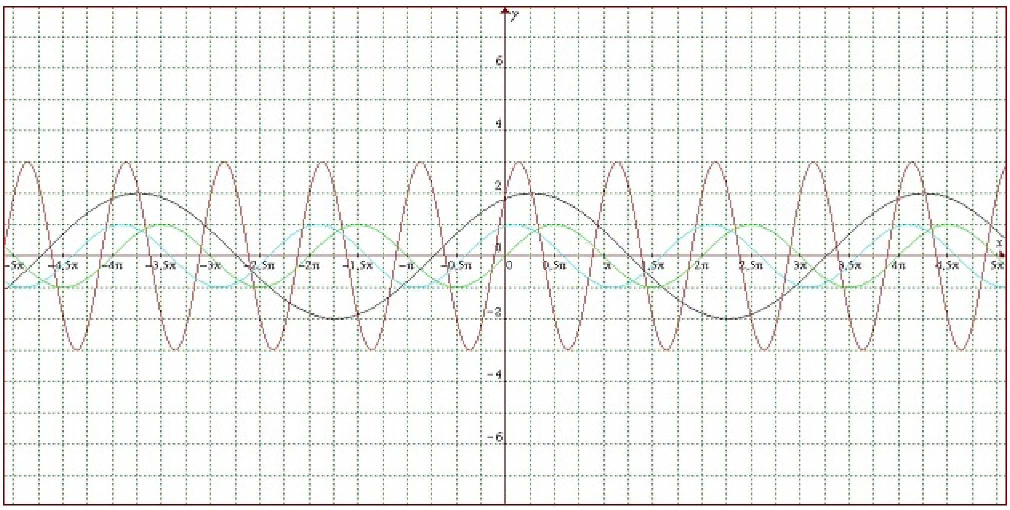

Figura 4.14: Análise da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = b\,\text{sen}(cx + d)$

Conclusão: quando $a = 0$ a função é ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$

Quando $d = 0$:

17- $y = 5 - 2\,\text{sen}(3x)$

18- $y = -2 + \frac{1}{2}\,\text{sen}(-2x)$

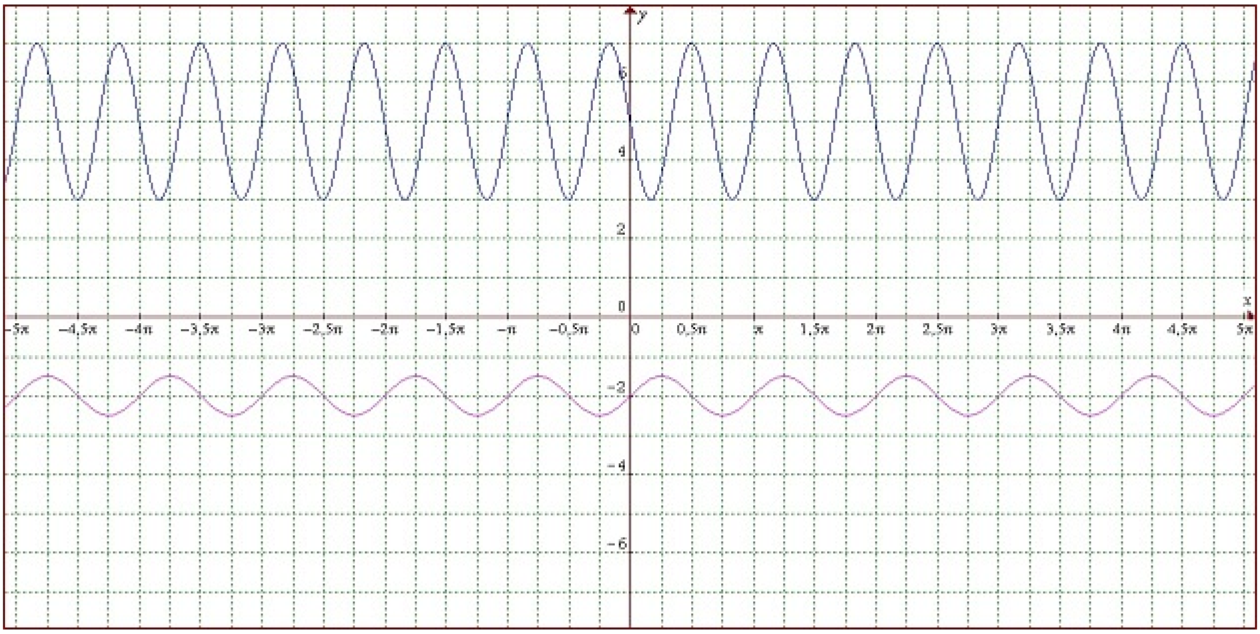

Figura 4.15: Análise da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx)$

Conclusão: quando $d = 0$ o gráfico da função intercepta o eixo y no ponto médio do intervalo dado pelo seu conjunto imagem.

Após a análise da interferência de cada um dos coeficientes no gráfico da função, espera-se que os alunos notem que podemos comparar todos esses gráficos e verificar que todos eles podem ser representados pela mesma curva, alterando-se apenas o período, amplitude e deslocamentos. Sendo assim, obtemos como padrão a curva:

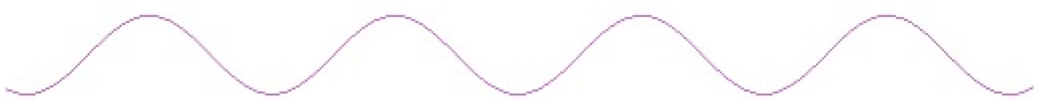

Figura 4.16: Forma geral do gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$

Com essa curva podemos esboçar o gráfico de qualquer função do tipo $y = a + b\,\text{sen}(cx + d)$, bastando ajustar o período, amplitude e deslocamentos nos eixos coordenados.

4.5 Famílias da função cosseno

Analogamente ao estudo anterior, a família da função cosseno é da forma $y = a + b\cos(cx + d)$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Vejamos os gráficos:

1- $y = \cos(x)$

2- $y = 2 + \cos(x)$

3- $y = -5 + \cos(x)$

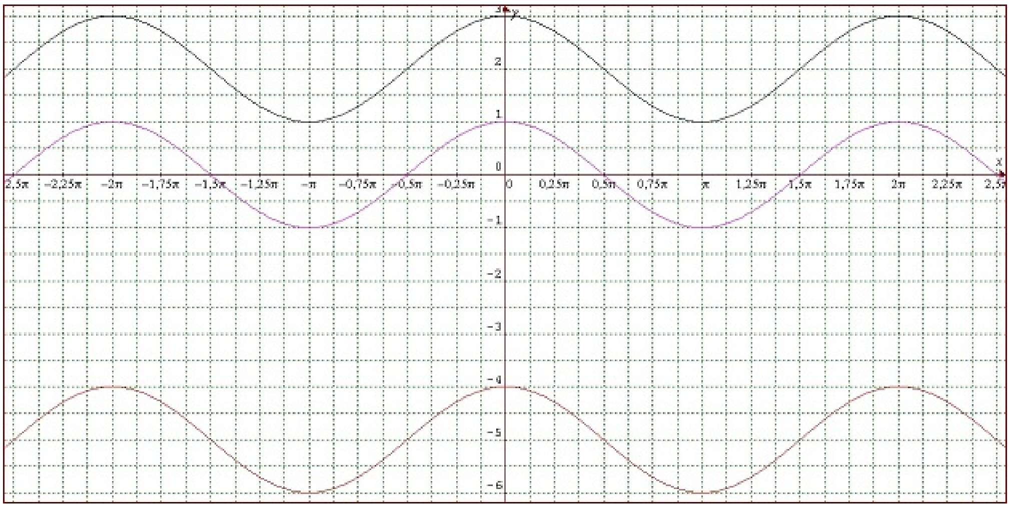

Figura 4.17: Análise do coeficiente "a" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "a" faz com que a função se desloque verticalmente, ou seja, é responsável pela translação vertical.

4- $y = \cos(x)$

5- $y = 2\cos(x)$

6- $y = \frac{1}{2}\cos(x)$

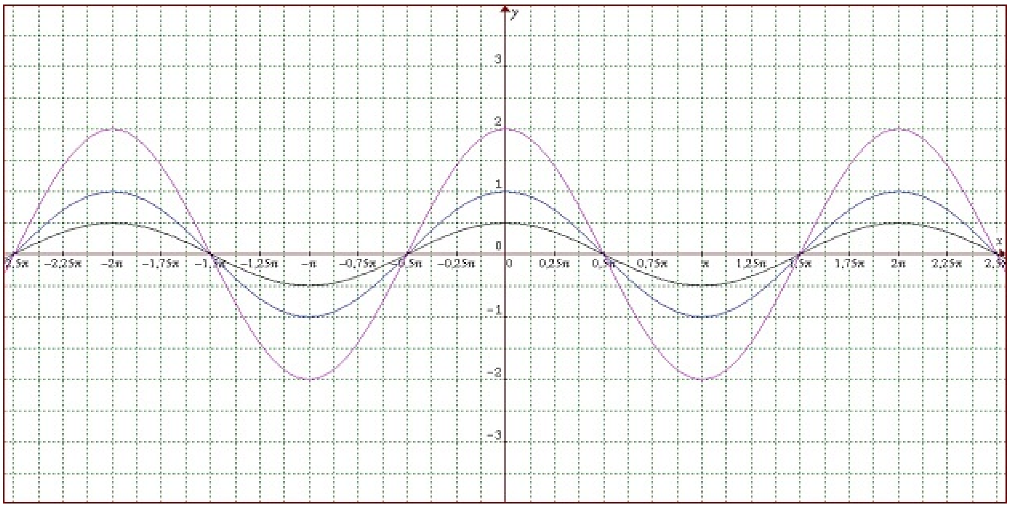

Figura 4.18: Análise do coeficiente "b" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "b", em módulo, varia a amplitude da função, comprimindo se reduzirmos o módulo de b e alongando se aumentarmos o módulo de b.

7- $y = \cos(x)$

8- $y = \cos 2x$

9- $y = \cos \frac{1}{2}x$

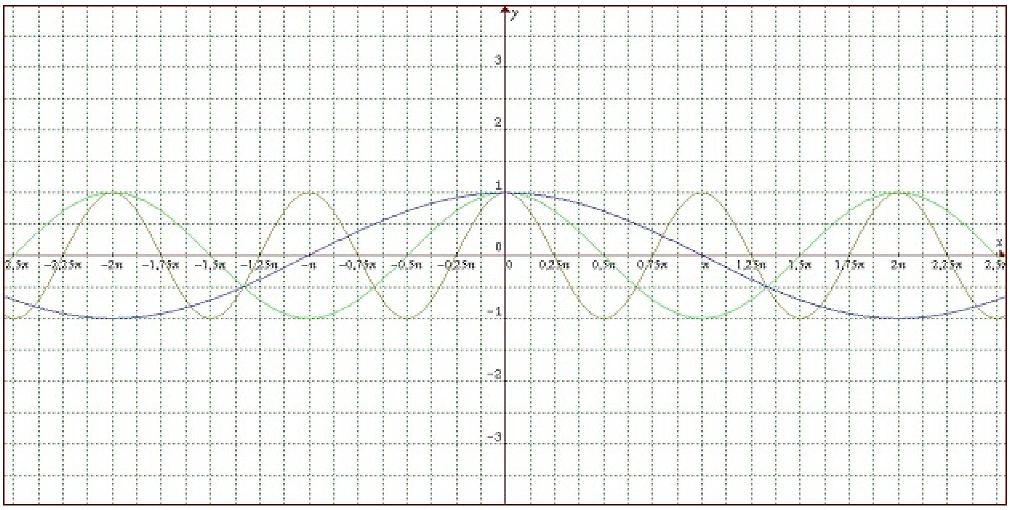

Figura 4.19: Análise do coeficiente "c" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "c", em módulo, varia o período da função, comprimindo se o módulo de c aumenta e alongando se diminuirmos o módulo de c.

10- $y = \cos(x)$

11- $y = \cos(x + \pi)$

12- $y = \cos(x - \pi/2)$

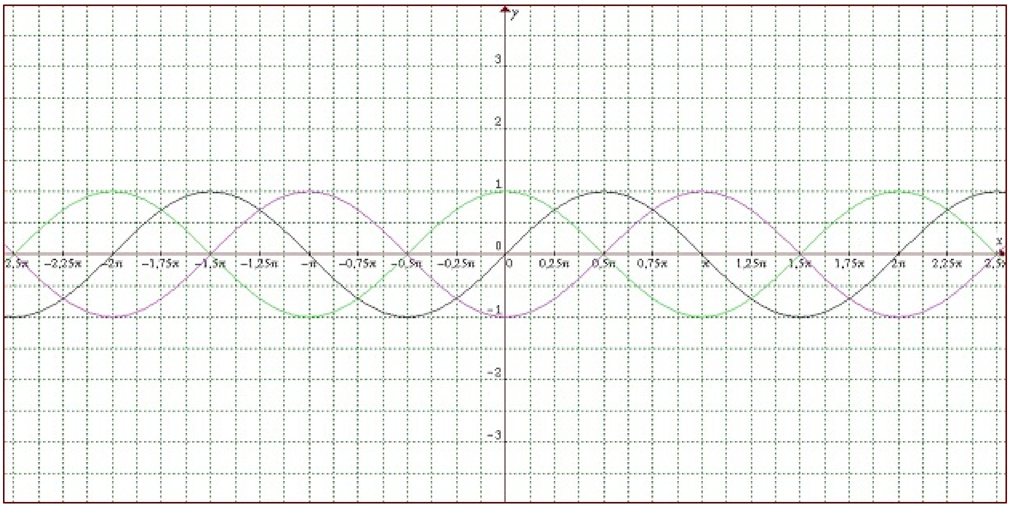

Figura 4.20: Análise do coeficiente "d" na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "d" faz com que a função se desloque horizontalmente.

Após a análise individual dos coeficientes, é relevante que o aluno faça gráficos utilizando vários desses coeficientes e tente verificar regularidades.

Quando $a = 0$:

13- $y = \cos(x)$

14- $y = 2\cos(\frac{1}{2}x + 20)$

15- $y = -3\cos(2x - 15)$

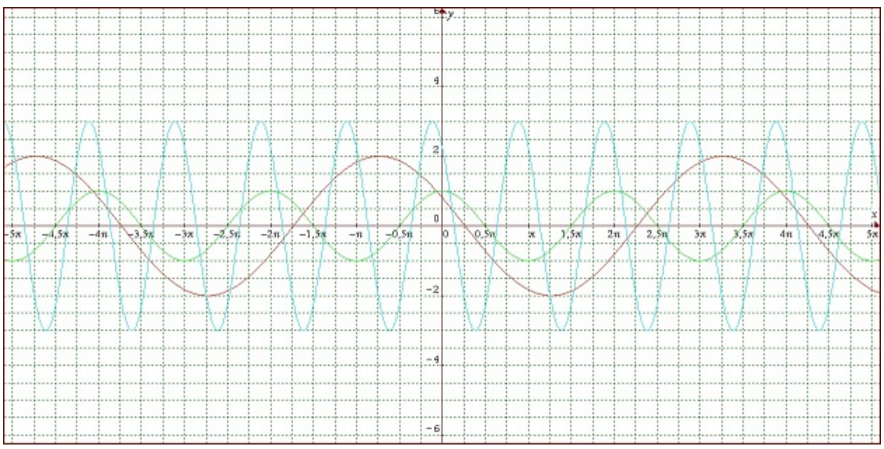

Figura 4.21: Análise da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = b\cos(cx + d)$

Conclusão: quando $a = 0$ a função é par, ou seja, $f(x) = f(-x)$

Quando $d = 0$:

16- $y = 5 - 2\cos(3x)$

17- $y = -2 + \frac{1}{2}\cos(-2x)$

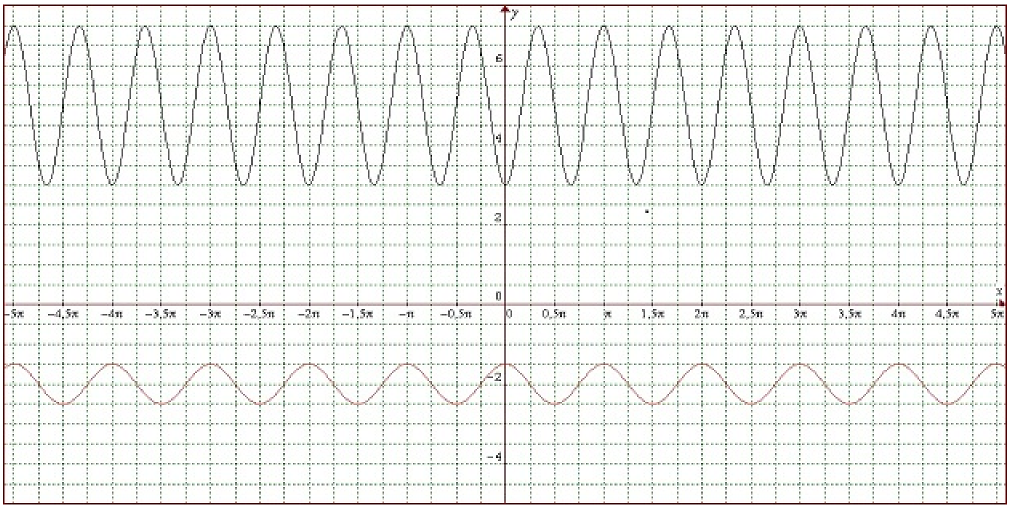

Figura 4.22: Análise da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx)$

Conclusão: quando $d = 0$ o gráfico da função intercepta o eixo y no ponto médio do intervalo dado pelo seu conjunto imagem.

Novamente, após a análise da interferência de cada um dos coeficientes no gráfico da função, espera-se que os alunos notem que podemos comparar todos esses gráficos e verificar que todos eles podem ser representados pela mesma curva, alterando-se apenas o período, amplitude e deslocamentos.

Sendo assim, obtemos como padrão a curva:

Figura 4.23: Forma geral do gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a + b\cos(cx + d)$

Com essa curva podemos plotar o gráfico de qualquer função do tipo $y = a + b\cos(cx + d)$, ajustando o período, amplitude e deslocamentos.

4.6 Famílias da função tangente

Finalizando, a família da função tangente é da forma $y = a + b\,\text{tg}(cx + d)$, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $cx + d \neq \pi/2 + k\pi$, onde k é número inteiro.

Vejamos os gráficos:

1- $y = \text{tg}(x)$

2- $y = 2 + \text{tg}(x)$

3- $y = -5 + \text{tg}(x)$

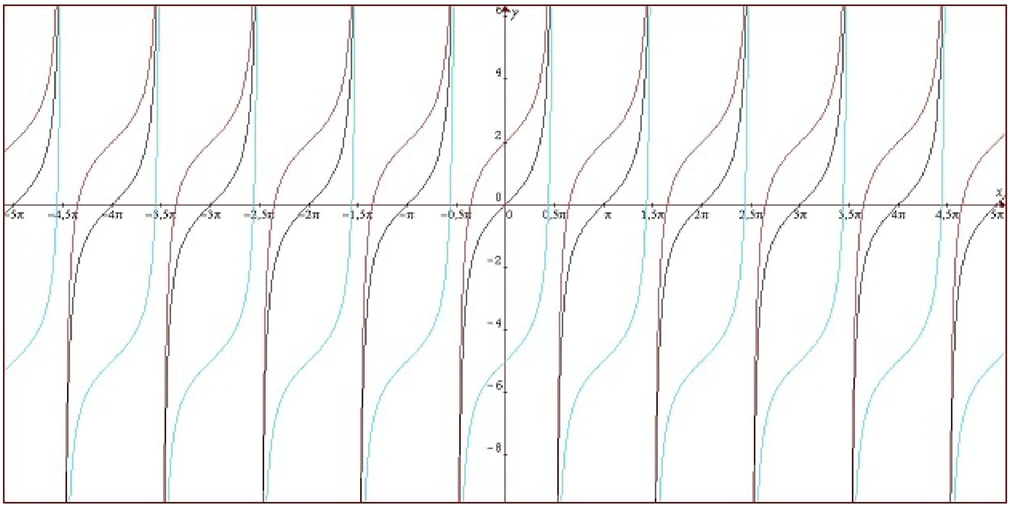

Figura 4.24: Análise do coeficiente "a" na função tangente

Conclusão: o coeficiente "a" faz com que a função se desloque verticalmente.

4- $y = \mathrm{tg}(x)$

5- $y = 2\,\mathrm{tg}(x)$

6- $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x)$

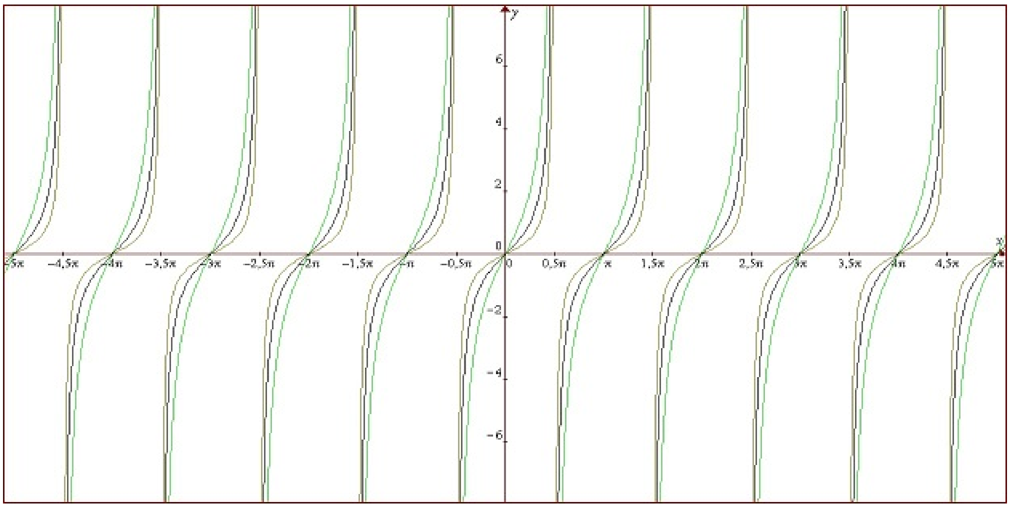

Figura 4.25: Análise do coeficiente "b" na função $f(x) = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "b", em módulo, altera a velocidade de crescimento/decrescimento da função, diminuindo se reduzirmos o módulo de b e aumentando se aumentarmos o módulo de b.

7- $y = \mathrm{tg}(x)$

8- $y = \mathrm{tg}(2x)$

9- $y = \mathrm{tg}(\frac{1}{2}x)$

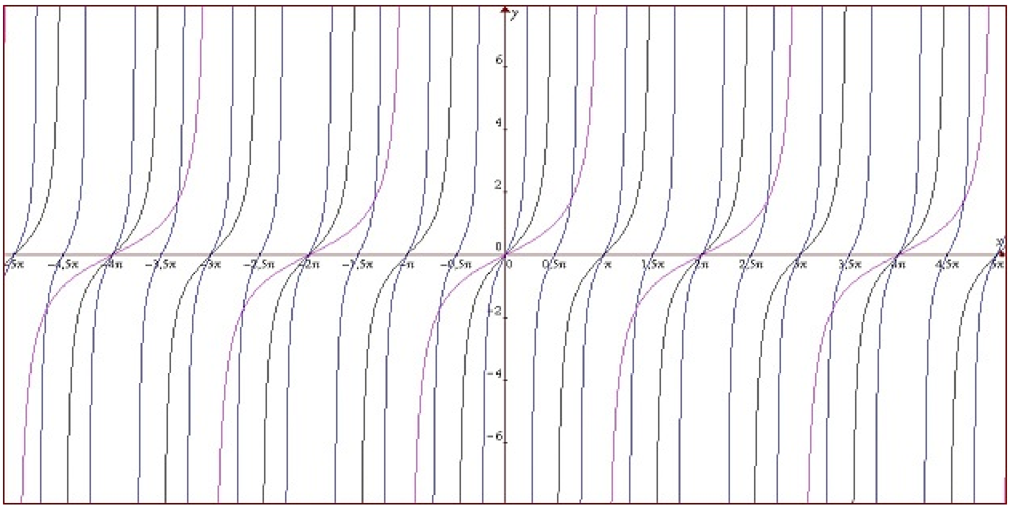

Figura 4.26: Análise do coeficiente "c" na função $f(x) = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "c", em módulo, varia o período da função (horizontal), comprimindo se o módulo de c aumenta e alongando se diminuirmos o módulo de c e, sessa forma, interferindo na distância entre as assíntotas verticais.

10- $y = \mathrm{tg}(x)$

11- $y = \mathrm{tg}(x + \pi/2)$

12- $y = \mathrm{tg}(x - \pi/6)$

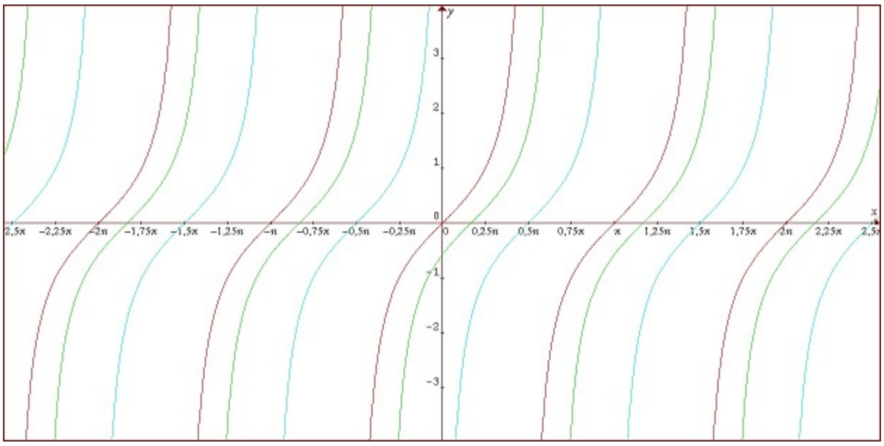

Figura 4.27: Análise do coeficiente "d" na função $f(x) = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$

Conclusão: o coeficiente "d" faz com que a função se desloque horizontalmente.

Após essa análise individual dos coeficientes, é relevante que o aluno faça gráficos utilizando vários desses coeficientes e tente verificar regularidades.

Quando $a = 0$:

13- $y = \mathrm{tg}(x)$

14- $y = 2\,\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x + 20)$

15- $y = 3\,\mathrm{tg}(2x - 15)$

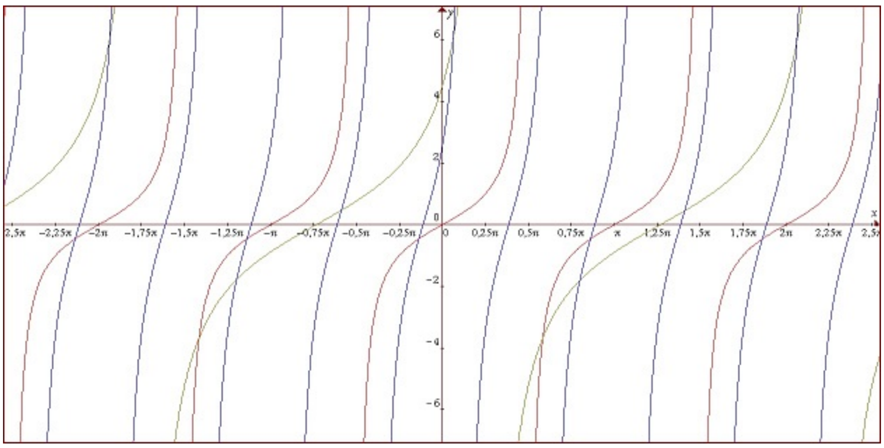

Figura 4.28: Análise da função $f(x) = b\,\mathrm{tg}(cx + d)$

Conclusão: quando $a = 0$ a função é ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$, no intervalo $]-P/2, P/2[$, considerando P o período da função.

Quando $d = 0$:

16- $y = 5 + 2\,\mathrm{tg}(3x)$

17- $y = -2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(2x)$

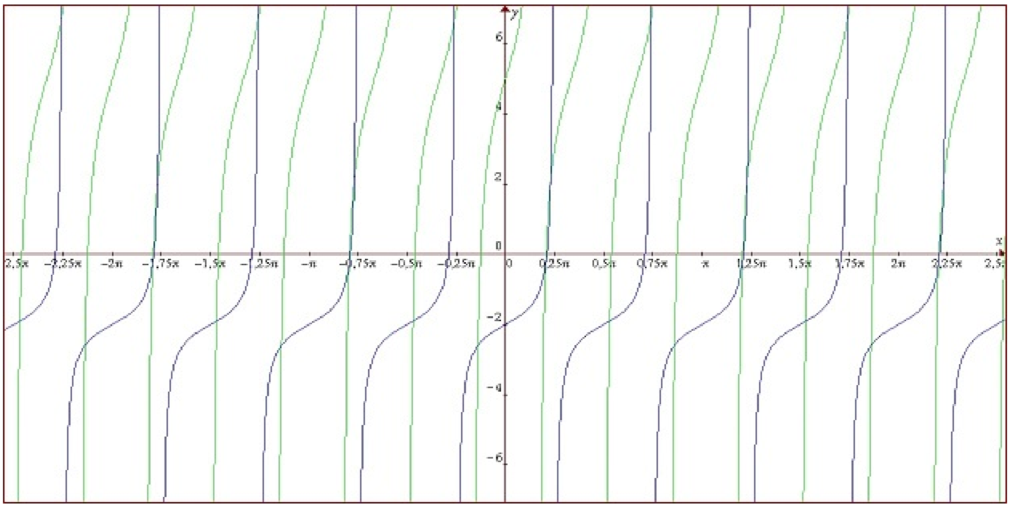

Figura 4.29: Análise da função $f(x) = a + b\,\mathrm{tg}(cx)$

Conclusão: quando $d = 0$ o gráfico da função intercepta o eixo y no ponto $(0, a)$ e há mudança na concavidade nos pontos onde a abscissa é um múltiplo do período e a ordenada é a.

Finalmente, após a análise da interferência de cada um dos coeficientes no gráfico da função, espera-se que os alunos notem que podemos comparar todos esses gráficos e verificar que todos eles podem ser representados pela mesma curva, alterando-se apenas o período, amplitude e deslocamentos.

Sendo assim, obtemos como padrão a curva:

Figura 4.30: Forma geral do gráfico da função $f(x) = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$

Com essa curva podemos esboçar o gráfico de qualquer função do tipo $y = a + b\,\mathrm{tg}(cx + d)$, ajustando o período, amplitude e deslocamentos.

De modo geral, os coeficientes a, b, c e d interferem nos gráficos de maneira análoga, da seguinte forma:

O coeficiente a é responsável pelo deslocamento ou translação vertical. Esse deslocamento será para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$.

O coeficiente "b" determina o alongamento ou a compressão vertical da curva e, por consequência, determina também o intervalo em que a curva oscila, $-b$ e b. Se b é negativo, além do alongamento ou da compressão ocorrerá também a reflexão da curva em torno de seu eixo. Se $|b| > 1$ a curva alonga na vertical e se $|b| < 1$ a curva comprime na vertical. Este alongamento ou compressão recebe o nome de amplitude da curva que é obtida fazendo $|b|$.

O coeficiente "c" determina o alongamento ou a compressão horizontal da curva e, por consequência, determina também o intervalo em que a curva se repete. Se $|c| > 1$ a curva comprime na horizontal e se $|c| < 1$ a curva alonga na horizontal. O intervalo em que a curva se repete é chamado período e é obtido fazendo $P = 2\pi/|c|$. Só haverá alteração no período se k for diferente de 1.

O coeficiente "d" é responsável pelo deslocamento ou translação horizontal. Tal deslocamento será d/c para direita se $d/c < 0$ ou para esquerda se $d/c > 0$ e é chamado de deslocamento de fase ou defasagem da curva.

É importante que esse mesmo procedimento seja estendido para abordar as funções secante, cossecante e cotangente.

Sendo assim, é possível que alguns modelos periódicos sejam abordados para que os alunos façam uma análise dos gráficos e consigam expressar uma boa aproximação por meio das funções trigonométricas estudadas.

Como aplicação desse estudo, podemos trabalhar com o software Trigonometria com Molas, que está disponível em **rived.mec.gov.br/atividades/matematica/ trigonometria_ molas/mat1_ativs1.swf**

Esse software aborda uma aplicação dos conceitos de gráficos de funções trigonométricas envolvendo o estudo do conteúdo de Física, denominado Movimento Harmônico Simples. Ele é dividido em duas atividades que apresentam animações e simulações do trabalho com molas, e ainda a teoria e definição de amplitude, frequência e período, entre outros. São apresentadas ainda questões que servem de apoio para a compreensão das atividades.

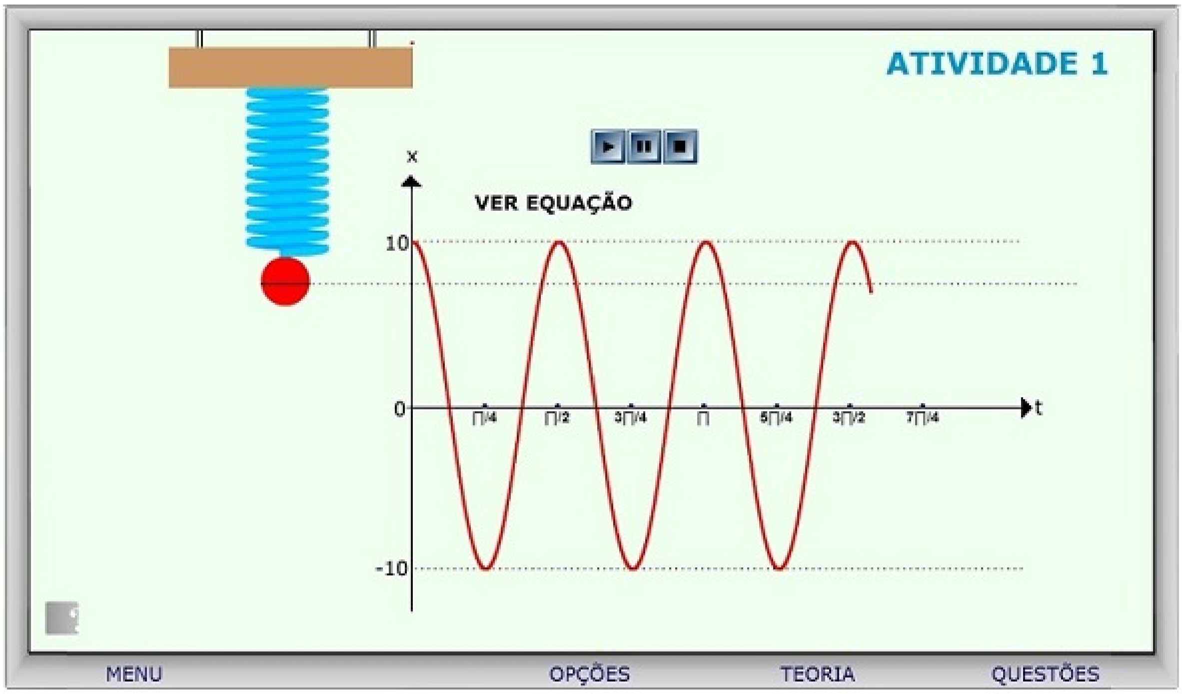

Figura 4.31: Análise do MHS no software Trigonometria com Molas

Após a manipulação e interação com o objeto, é necessário que o aluno tente explicar a relação do movimento da mola com o gráfico e consiga responder algumas questões: - qual é o período da função? - segundo o gráfico, quantas vezes o movimento se repete? - qual é a frequência do movimento? - qual é a amplitude do movimento?

Sendo assim, é importante discutir com o aluno que uma das aplicações das funções trigonométricas é o estudo dos movimentos harmônicos simples (MHS) em Física, que é caracterizado pelo movimento de um corpo com oscilação em torno de um ponto de equilíbrio. Os MHS são fenômenos periódicos no tempo. Os coeficientes a, b, c e d das funções $y = a + b\,\text{sen}(cx + d)$ e $y = a + b\cos(cx + d)$ são substituídos por constantes que representam aspectos importantes do MHS. A constante "a" é nula, pois considera-se que o sistema de coordenadas tem origem na posição de equilíbrio, "b" é a amplitude A do movimento a partir do centro de oscilação, "c" é a frequência angular ω, "d" é a fase inicial ϕ_0İ e o argumento seno ou cosseno, ou seja, $\omega.t + \alpha$ é chamado fase do movimento no tempo t. Dessa forma, a equação do espaço no MHS é comumente apresentada como $x = A.\cos(\omega.t + \alpha)$ ou $x = A.\,\text{sen}(\omega.t + \alpha)$.

5 Relações trigonométricas: transformações, equações e inequações

Dando continuidade aos estudos de trigonometria, no 2° ano do ensino médio é necessário abordar as transformações, igualdades e inequações fundamentais.

Ao estudar as fórmulas da adição, multiplicação e divisão, é importante a dedução dessas fórmulas para não ficar algo voltado somente à memorização, mas sim algo construído de forma consistente, uma vez que nessa etapa os alunos já estão mais maduros para lidar com conceitos abstratos e deduções lógicas.

Em geral, os livros trazem as fórmulas prontas e exercícios práticos que exigem a simples aplicação de tais fórmulas, fazendo com que o ensino de trigonometria fique restrito, muitas vezes, à mera memorização, mesmo sem significado. Esse tipo de abordagem contradiz a própria evolução histórica da trigonometria que se desenvolveu principalmente devido às questões práticas. Logo, é pertinente que seja feita uma discussão sobre a importância desses estudos para resolver problemas práticos em situações que exigem, principalmente, estimativas dos valores trigonométricos de ângulos não notáveis, mas que de certa forma podem ser decompostos em soma ou diferença de ângulos notáveis. Há também a necessidade de trabalharmos com triângulos não retângulos, uma vez que no cotidiano nos deparamos com triângulos de diversas formas. Para isso, programas gráficos de computador, como o Graphmatica, podem ser utilizados como instrumentos aliados na construção dos conhecimentos do aluno que deve ser motivado e encorajado a questionar, pesquisar e refletir sobre as ligações entre as abordagens algébrica e geométrica, fazendo uma análise crítica dos resultados.

Algumas equações envolvendo funções trigonométricas são verdadeiras para todos os ângulos e são conhecidas como identidades trigonométricas. Muitas expressam relações geométricas importantes. Por exemplo, as identidades Pitagoreanas são uma expressão do teorema de Pitágoras. Aqui há algumas das identidades mais comumente utilizadas, assim como as fórmulas mais importantes conectando ângulos e lados de um triângulo arbitrário e algumas demonstrações que podem ser desenvolvidas com os alunos no ensino médio.

Relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

.

Antes da demonstração dessa fórmula é importante que os alunos levantem conjecturas calculando o valor de $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ para diversos valores de x, dando enfoque aos valores notáveis. Após a constatação que independentemente do ângulo, o resultado é sempre igual a 1, é importante que façamos a formalização dessa relação com a demonstração abaixo:

No círculo trigonométrico, os valores do seno são representados no eixo vertical, e os valores do cosseno pelo cosseno são representados no eixo horizontal. Ao determinarmos um ponto qualquer pertencente à circunferência, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta da origem dos eixos do círculo até o ponto determinado, formamos um ângulo θ, como mostram os esquemas a seguir:

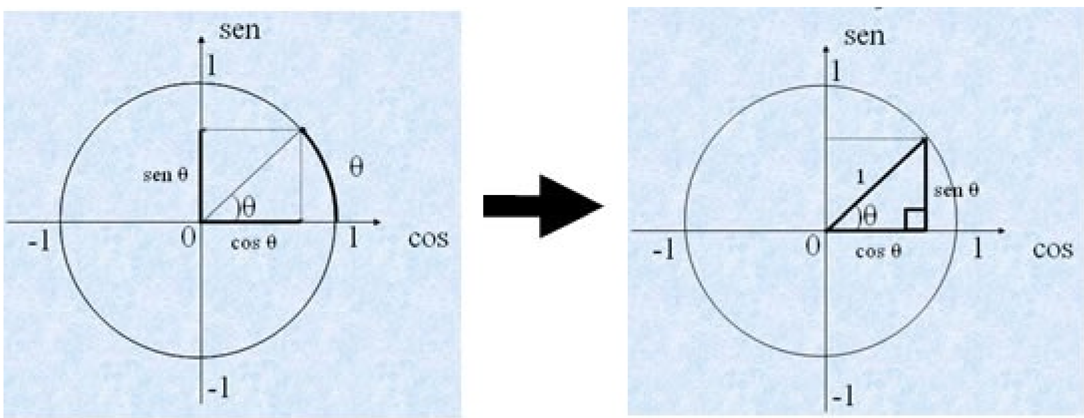

Figura 5.1: Eixos: seno e cosseno

Com base no triângulo retângulo formado, aplicamos o teorema de Pitágoras, para verificar que: $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

No caso acima temos θ no primeiro quadrante, mas caso ele esteja em qualquer outro quadrante chegamos à mesma relação lembrando que: $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ e $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$.

Como $(\operatorname{sen}(\theta))^2 = (-\operatorname{sen}(\theta))^2$ e $(\cos(\theta))^2 = (-\cos(\theta))^2$, a relação fundamental continua válida.

5.1 Identidades de soma e subtração

De maneira análoga à abordagem da relação fundamental da trigonometria, podemos pedir para os alunos escolherem dois ângulos notáveis e aplicar nas identidades de adição e subtração abaixo, que serão deduzidas posteriormente:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$$
$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$$

Para deduzir as fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma $(a+b)$ e da diferença $(a-b)$ de dois números reais quaisquer a e b, conhecidas as funções circulares de a e de b, vamos recorrer aos conhecimentos já adquiridos no círculo trigonométrico.

As demonstrações de fórmulas e teoremas são fundamentais para que o aluno compreenda o pensamento matemático, os métodos e o rigor exigido, a criatividade, os erros e tentativas presentes na tarefa de demonstrar e provar a veracidade da afirmativa matemática. O que vemos, ainda hoje, é a idéia de que basta o aluno conhecer a fórmula, não é necessário saber como chegar na fórmula. Naturalmente, essa postura não contribui em nada para fazer com que os estudantes entendam e, consequentemente, aprendam a gostar de Matemática.

Sendo assim, vamos demonstrar as identidades supracitadas.

5.1.1 Cosseno da soma: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Sejam P, Q e R os pontos do ciclo associado aos números a, $a+b$ e $-b$, respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano uOv, as coordenadas desses pontos são:

$P = (\cos(a), \operatorname{sen}(a))$, $Q = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b)$ e $R = (\cos(b), -\operatorname{sen}(b))$.

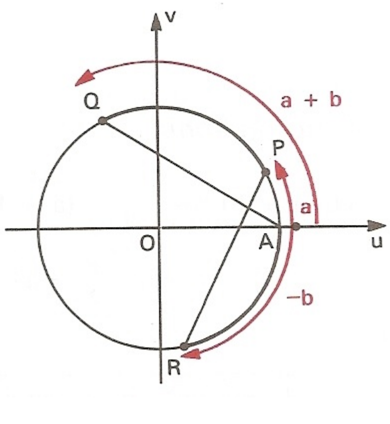

Figura 5.2: Cosseno da Soma

Os arcos AQ e RP têm a mesma medida, portanto as cordas AQ e PR têm medidas iguais. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 \\ &= [\cos(a+b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 \\ &= \cos^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) \\ &= 2 - 2\cos(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 \\ &= [\cos(a) - \cos(b)]^2 + [\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b)]^2 \\ &= \cos^2(a) - 2.\cos(a).\cos(b) + \cos^2(b) + \operatorname{sen}^2(a) + 2.\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}^2(b) \\ &= 2 - 2.\cos(a).\cos(b) + 2.\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b) \end{aligned}.$$

Como $d_{AQ} = d_{RP}$, então $2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos(a).\cos(b) + 2.\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b)$.
Logo, obtemos a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Observação: é possível alinhar essa demonstração com a aula de geometria analítica, uma vez que usa-se muito a distância entre pontos no plano.

5.1.2 Cosseno da diferença: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Para demonstrarmos essa igualdade, basta utilizarmos a fórmula anterior:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos(a).\cos(-b) - \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(-b).$$

Como $\cos(-b) = \cos(b)$, pois a função cosseno é par e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$, pois a função seno é ímpar, obtemos:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

5.1.3 Seno da soma: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Como do círculo trigonométrico temos $\operatorname{sen}(a) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ e $\cos(a) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a)$, temos que $\operatorname{sen}(a+b) = \cos[\frac{\pi}{2} - (a+b)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\frac{\pi}{2} - a).\cos(b) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a).\operatorname{sen}(b)$.

Logo,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a).$$

5.1.4 Seno da diferença: $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

De fato, $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}[a+(-b)] = \operatorname{sen}(a).\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b).\cos(a) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) + (-\operatorname{sen}(b)).\cos(a)$.

Logo,

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a).$$

5.1.5 Tangente da soma: $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$

Sendo $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tg}(a+b) & = & \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} \\ & = & \frac{\operatorname{sen}(a).\cos(b)+\operatorname{sen}(b).\cos(a)}{\cos(a).\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)} \\ & = & \frac{\frac{\operatorname{sen}(a).\cos(b)+\operatorname{sen}(b).\cos(a)}{\cos(a).\cos(b)}}{\frac{\cos(a).\cos(b)-\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b)}{\cos(a).\cos(b)}} \\ & = & \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)} \end{array}.$$

É importante ressaltar que esta fórmula só é aplicável se $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

5.1.6 Tangente da diferença: $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$

Utilizando a fórmula anterior temos

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}[a+(-b)] = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}(a).\operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg}(a)+(-\operatorname{tg}(b))}{1-\operatorname{tg}(a).(-\operatorname{tg}(b)}.$$

Assim

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.$$

Observemos que esta fórmula só é aplicável se $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ e $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

5.2 Fórmulas de multiplicação e divisão

5.2.1 Fórmulas de multiplicação

Nesta seção vamos deduzir as fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $2a$, $3a$, $4a$ etc., conhecidas as funções circulares de a.

Fazendo $2a = a + a$ e aplicando as fórmulas da adição obtemos

I)
$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos(a+a) \\ & = & \cos(a)\cos(a) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(a) \\ & = & \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) \end{array}$$

(a) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

(b) $\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(a)$

II)
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(2a) & = & \operatorname{sen}(a+a) \\ & = & \operatorname{sen}(a)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(a) \\ & = & 2\operatorname{sen}(a)\cos(a) \end{array}$$

III)
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tg}(2a) & = & \operatorname{tg}(a+a) \\ & = & \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(a)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(a)} \\ & = & \frac{2\operatorname{tg}(a)}{1-\operatorname{tg}^2(a)} \end{array}$$

De modo análogo, os alunos podem fazer as manipulações necessárias para chegarem às fórmulas de $\operatorname{sen}(3a)$,$\cos(3a)$ e $\operatorname{tg}(3a)$.

5.2.2 Fórmulas de divisão

Também é importante deduzir as fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$, conhecidas as funções circulares de x.

Conhecido o $\cos(x)$, desde que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ e $\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(a)$, fazendo $x = 2a$, obtemos:

$\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1$ donde segue que $\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$

$\cos(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})$ donde segue que $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

$\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})/\cos(\frac{x}{2})$ donde segue que $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$

Novamente, após essa manipulação, recomenda-se que os alunos façam, de maneira análoga, a seguinte atividade: conhecido o $\operatorname{sen}(x)$ calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$. Para isto deverão fazer uso da identidade $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$ e aplicar as fórmulas de divisão acima.

5.3 Equações trigonométricas

Primeiramente os alunos devem saber que, em matemática, uma equação é uma afirmação que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas e que resolver uma equação é encontrar todos os valores possíveis para a incógnita que tornem a igualdade verdadeira.

Como nosso foco, nesse momento, é o estudo das funções trigonométricas, vamos ressaltar que a maioria dessas equações trigonométricas são (ou reduzem-se a) um dos três tipos a seguir:

1. $\operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}(\alpha)$

2. $\cos(a) = \cos(\alpha)$

3. $\operatorname{tg}(a) = \operatorname{tg}(\alpha)$

as quais são chamadas de equações fundamentais.

Observando o círculo trigonométrico

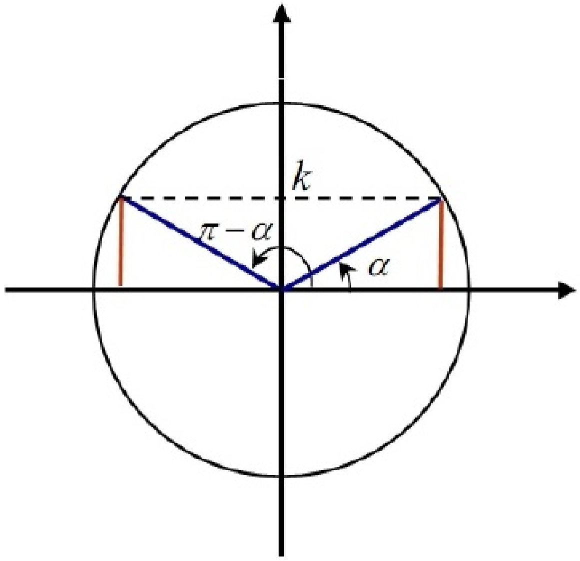

Figura 5.3: $\text{sen}(a) = \text{sen}(\alpha)$

chegamos à conclusão de que $\text{sen}(a) = \text{sen}(\alpha)$ se, e somente se,

1. a e α têm a mesma imagem, ou seja, são côngruos módulo 2π: $a = \alpha + 2k\pi$
2. a e α têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares: $a = \pi - \alpha + 2k\pi$

Observando o círculo trigonométrico

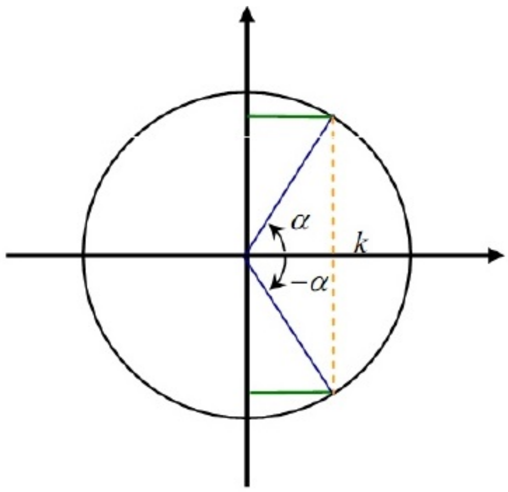

Figura 5.4: $\cos(a) = \cos(\alpha)$

chegamos à conclusão de que $\cos(a) = \cos(\alpha)$ se, e somente se,

1. a e α têm a mesma imagem, ou seja, são côngruos módulo 2π: $a = \alpha + 2k\pi$

2. a e α têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares: $a = -\alpha + 2k\pi$

Finalmente, observando o círculo trigonométrico

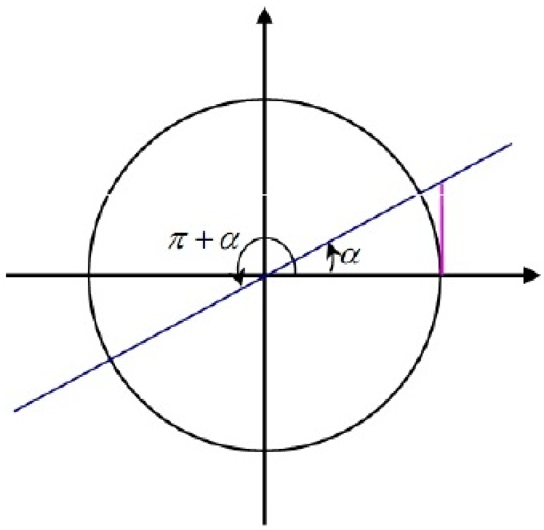

Figura 5.5: $\text{tg}(a) = \text{tg}(\alpha)$

chegamos à conclusão de que $\text{tg}(a) = \text{tg}(\alpha)$ se, e somente se,

1. a e α têm a mesma imagem, ou seja, são côngruos módulo 2π: $a = \alpha + 2k\pi$

2. a e α têm imagens simétricas em relação à origem do círculo trigonométrico, isto é, são explementares: $a = \pi + \alpha + 2k\pi$

5.4 Inequações trigonométricas

De forma análoga ao estudo das equações, os alunos devem saber que em matemática, uma inequação é uma afirmação que estabelece uma desigualdade entre duas expressões matemáticas e que resolver uma inequação é encontrar os valores de todas as incógnitas que tornem a desigualdade verdadeira.

Quase todas as inequações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das inequações fundamentais abaixo, onde m é um número real:

1) $\text{sen}(x) > m$ ou $\text{sen}(x) \geq m$

2) $\operatorname{sen}(x) < m$ ou $\operatorname{sen}(x) \leq m$

3) $\cos(x) > m$ ou $\cos(x) \geq m$

4) $\cos(x) < m$ ou $\cos(x) \leq m$

5) $\operatorname{tg}(x) > m$ ou $\operatorname{tg}(x) \geq m$

6) $\operatorname{tg}(x) < m$ ou $\operatorname{tg}(x) \leq m$

5.4.1 Resolução de $\operatorname{sen}(x) > m$

Marcamos sobre o eixo v o ponto P_1 tal que $OP_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo v. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{sen}(x) > m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de r. Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o círculo no sentido anti-horário até completar uma volta.

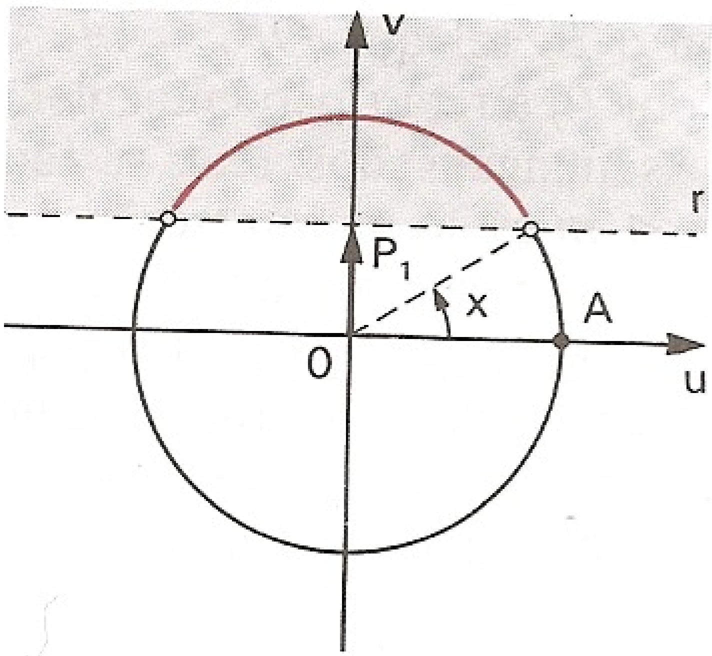

Figura 5.6: $\operatorname{sen}(x) > m$

5.4.2 Resolução de $\operatorname{sen}(x) < m$

Mesmo procedimento do item anterior, mas ao invés de estarem acima de r, estão abaixo.

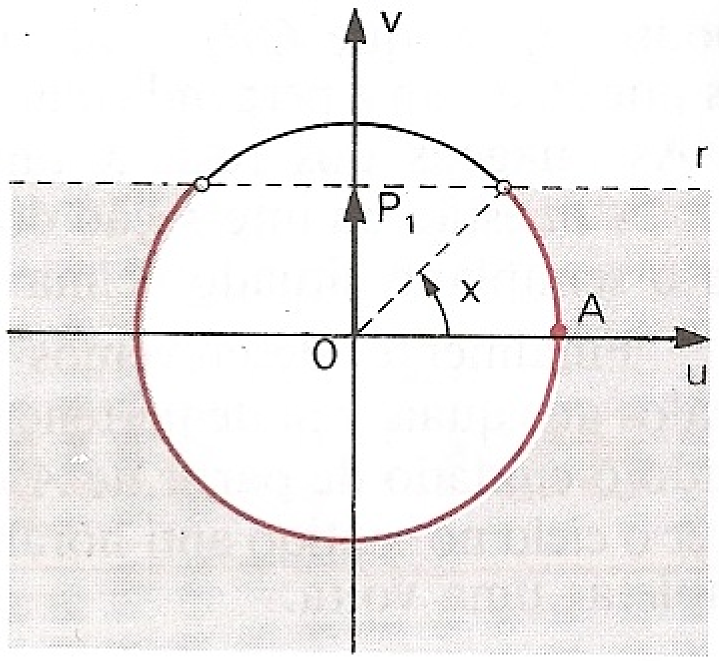

Figura 5.7: $\text{sen}(x) < m$

5.4.3 Resolução de $\cos(x) > m$

Marcamos sobre o eixo u o ponto P_2 tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo u. As imagens dos reais x tais que $\cos(x) > m$ estão na interseção do círculo com o semiplano situado à direita de r. Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

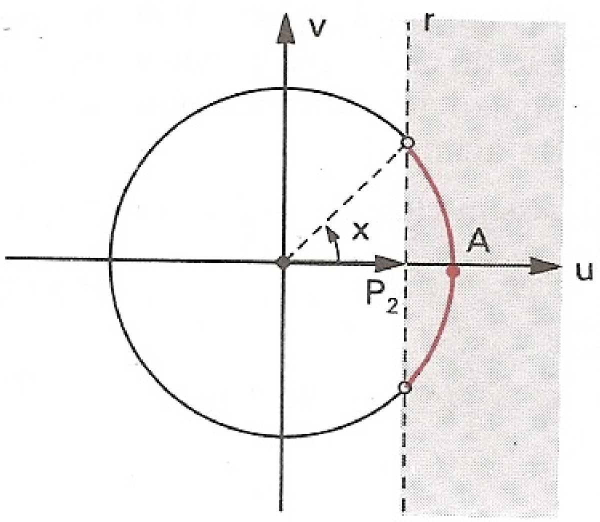

Figura 5.8: $\cos(x) > m$

5.4.4 Resolução de $\cos(x) < m$

Mesmo procedimento do item anterior, mas ao invés de estarem à direita de r, estão à esquerda de r.

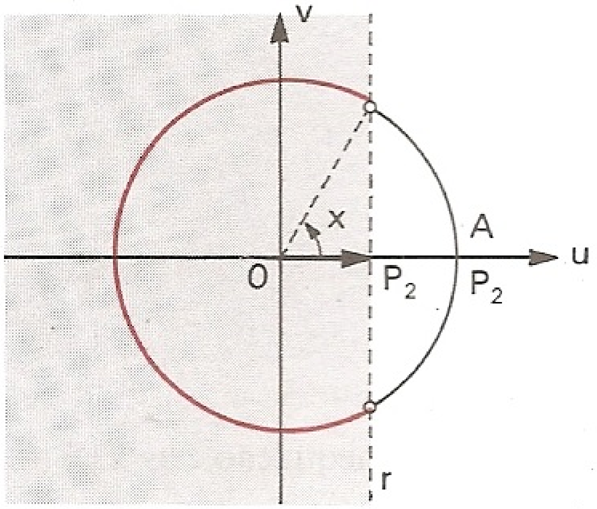

Figura 5.9: $\cos(x) < m$

5.4.5 Resolução de $\mathrm{tg}(x) > m$

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $AT = m$. Traçamos a reta $r = OT$. As imagens dos reais x tais que $\mathrm{tg}(x) > m$ estão na interseção do círculo com o ângulo rOv. Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

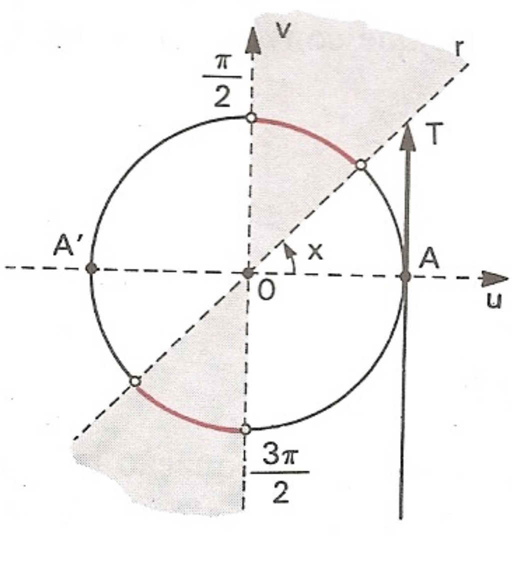

Figura 5.10: $\mathrm{tg}(x) > m$

5.4.6 Resolução de $\text{tg}(x) < m$

Mesmo procedimento do item anterior, mas ao invés de estarem na interseção do ciclo com o ângulo rOv, está na interseção do círculo com o ângulo vOr.

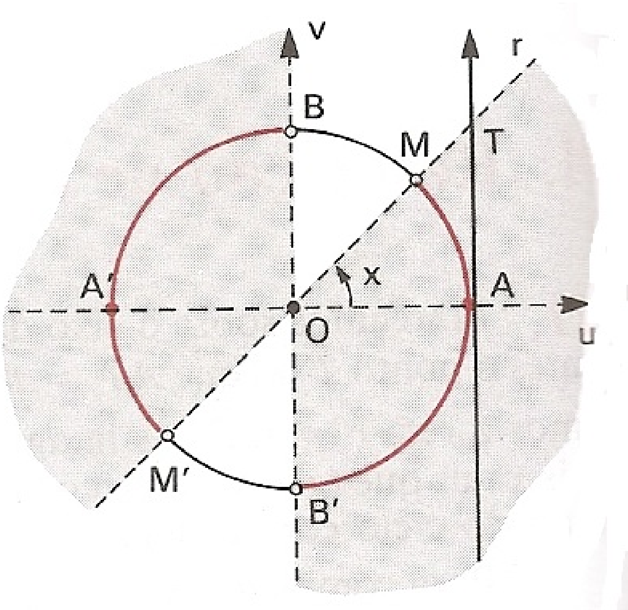

Figura 5.11: $\text{tg}(x) < m$

De forma análoga, os alunos podem observar as resoluções das inequações onde há os sinais $\geq$ ou $\leq$.

5.5 Lei dos cossenos

Como estamos trabalhando com alunos do ensino médio, podemos apresentar a demonstração formal da lei dos cossenos. Sendo assim, consideremos a figura a seguir, em que podemos observar três triângulos: ABC, BCD e BAD.

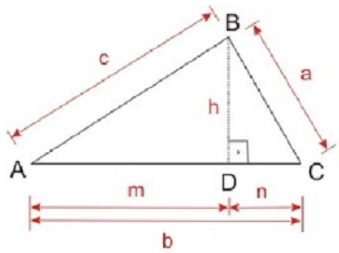

Figura 5.12: Relações métricas no triângulo retângulo

Destes triângulos, pode-se extrair as seguintes relações:

$$b = n + m \text{ e } m = c.\cos(\widehat{A})$$

Usando o teorema de Pitágoras para obter uma relação entre os lados dos triângulos, temos: para o triângulo BCD, $a^2 = n^2 + h^2$ e para o triângulo BAD, $c^2 = m^2 + h^2$.

Substituindo: $n = b - m$ e $h^2 = c^2 - m^2$ em $a^2 = n^2 + h^2$ teremos:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-m)^2 + c^2 - m^2 \\ &= b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bm \end{aligned}$$

Entretanto, pode-se substituir a relação $m = c.\cos(A)$, do triângulo BAD, na equação acima. Dessa maneira, encontra-se uma expressão geral da lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\widehat{A})$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar as demais relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\widehat{C})$$

Até agora as razões trigonométricas estudadas foram utilizadas apenas em triângulos retângulos. No entanto, vamos, a partir de agora, mostrar outras relações que valem para quaisquer triângulos e, assim, estudaremos valores de senos e cossenos de ângulos obtusos.

Utilizamos a lei dos cossenos nas situações envolvendo triângulos não retângulos, isto é, triângulos quaisquer. Esses triângulos não possuem ângulo reto, portanto as relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente não são válidas. Em um triângulo retângulo ABC de lados AB de medida c, AC de medida b e BC de medida a, podemos determinar os valores de medidas de ângulos e medidas de lados utilizamos a lei dos cossenos, que é expressa pelas seguintes relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\widehat{C})$$

Para que o aluno formule conjecturas e se convença de tais relações, podemos fazer uma manipulação no Geogebra que é muito ilustrativa.

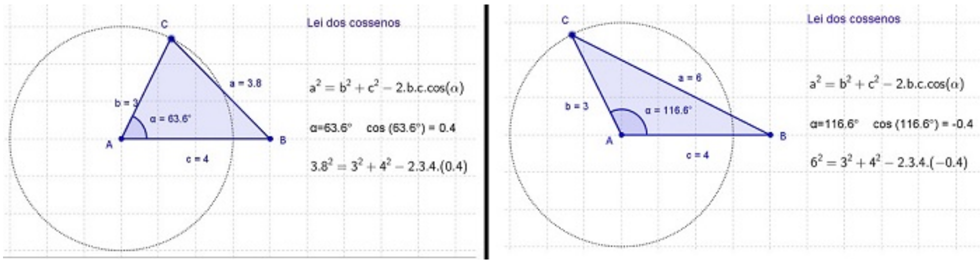

Figura 5.13: Ilustração da lei dos cossenos com auxílio do Geogebra

Ao manipular o vértice C do triângulo variamos o ângulo $\widehat{A}$. Os alunos devem acompanhar as alterações nos comprimentos dos lados AC e CB, que estão relacionados pela expressão da lei dos Cossenos. Aproveitando essa atividade, os alunos podem analisar as situações em que o ângulo em A se iguala a $90°$ e $270°$, verificando, assim, o Teorema de Pitágoras.

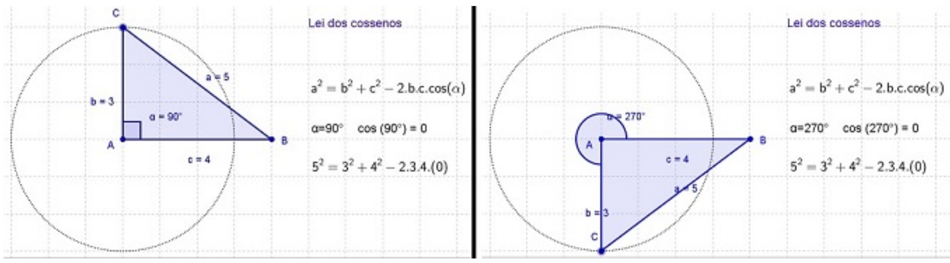

Figura 5.14: Teorema de Pitágoras e lei dos cossenos com auxílio do Geogebra

Dessa forma, os alunos podem checar que o teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos quando o ângulo é reto.

O francês François Viète $(1540 - 1603)$ é considerado o mais eminente matemático do século XVI. Contribuiu bastante para o avanço do estudo da trigonometria e a atual forma da expressão da lei dos cossenos foi estabelecida por ele.

5.6 Lei dos senos

O estabelecimento de certas relações que hoje chamamos fórmulas fundamentais da trigonometria deve-se aos matemáticos hindus, do século V ao século XII. Dentre eles destaca-se Aryabhata (séc.VI), um astrônomo indiano, que associou o seno de um ângulo bisseccionado com a metade da corda bisseccionada correspondente. Em outras palavras, dados uma circunferência de centro C e um arco AB nessa circunferência, a corda é a linha que subentende o arco. Uma bissetriz perpendicular da corda passa através do centro C da circunferência e bissecciona o ângulo $A\widehat{C}B$. Uma metade da corda bisseccionada é o seno do ângulo bisseccionado.

Com isso elaborou uma tábua de valores do seno.

Matemáticos árabes, depois de traduzirem as obras deixadas pelos hindus, desenvolveram o estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos e estabeleceram, para qualquer triângulo, a lei dos senos.

Em trigonometria, a lei dos senos é uma relação matemática de proporção sobre a medida de triângulos arbitrários em um plano. Em um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência de raio r, de lados BC, AC e AB que medem respectivamente a, b e c e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ vale a seguinte relação: $\frac{a}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\widehat{C})} = 2r$

Para demonstrar a lei dos senos, consideremos um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de raio r. A partir do ponto B construa o ponto diametralmente oposto D, e, ligando D a C, forme um novo triângulo BCD retângulo em $\widehat{C}$. Da figura, pelo teorema do ângulo inscrito, chegamos à conclusão que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ coincidem, visto que os triângulos ABC e BCD determinam na circunferência uma mesma corda BC.

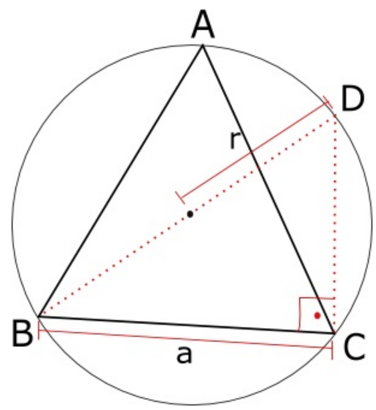

Figura 5.15: Lei dos senos

Assim, $\text{sen}(D) = \frac{a}{2r}$ o que implica $a = 2r.\text{sen}(\widehat{A})$, ou equivalentemente, $\frac{a}{\text{sen}(\widehat{A})} = 2r$.

Fazendo este mesmo processo para os ângulos B e C teremos as relações: $\frac{b}{\text{sen}(\widehat{B})} = 2r$ e $\frac{c}{\text{sen}(\widehat{C})} = 2r$ onde b é a medida do lado AC, oposto ao ângulo $\widehat{B}$, c é a medida do lado AB, oposto ao ângulo $\widehat{C}$ e $2r$ é uma constante.

Logo, podemos concluir que $\frac{a}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\widehat{C})} = 2r$.

Para ilustrar essa lei e fazer com que os alunos levantem hipóteses e conjecturas testando sua validade para diversos valores, novamente vamos recorrer ao apelo visual e de manipulação de objetos no software Geogebra, que auxiliará na dedução da lei dos senos pela inscrição de dois triângulos em uma circunferência. Na imagem abaixo o aluno irá movimentar os vértices dos triângulos e observar os valores dos ângulos.

De acordo com a figura, o ângulo A' enxerga o mesmo arco BC que o ângulo $\widehat{A}$ do triângulo ABC. Portanto, ambos têm a mesma medida em radianos. O triângulo $A'BC$ é retângulo. Portanto, sua hipotenusa $A'C$ equivale ao diâmetro da circunferência, ou seja, $A'C = 2r$.

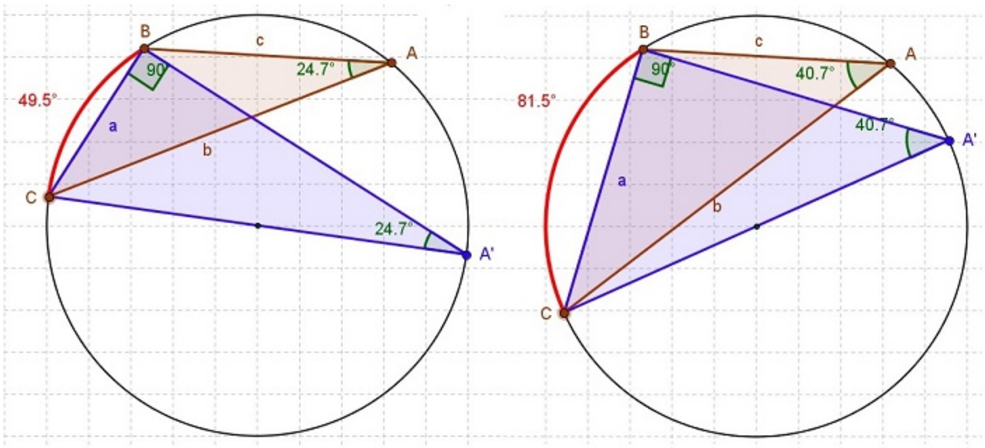

Figura 5.16: Verificação da validade da lei dos senos com auxílio do Geogebra

Para o triângulo $A'BC$ podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\widehat{A'}) = \frac{a}{2r}$$

Daí temos que

$$a = 2r.\operatorname{sen}(\widehat{A'}) = 2r.\operatorname{sen}(\widehat{A'})$$

e portanto

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = 2r.$$

Fazendo o mesmo para os demais ângulos, os alunos podem verificar que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\widehat{C})} = 2r$$

Não há sentido em aprender diversos conceitos matemáticos sem que exista uma compreensão da aplicação destes conceitos, mesmo que em situações hipotéticas. Sendo assim, vamos aplicar as leis dos senos e cossenos em dois contextos que envolvem ângulo e medida do lado.

Consideremos duas situações, onde um construtor de pontes deseja calcular o tamanho da ponte que será construída, utilizando-se de informações diferentes.

Situação 1): O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos estes onde a ponte deverá ser construída; entretanto ele não possui nenhuma ferramenta que meça essa distância, mas ele conhece algumas ferramentas e conceitos matemáticos e teve a seguinte idéia: Como ele possuía uma ferramenta que calcula ângulos, ele marcou um ponto B, calculou o ângulo $B\widehat{A}C$ que foi igual a 85°, caminhou até o ponto B, uma distância de 2km, e calculou o ângulo $A\widehat{B}C$ obtendo um ângulo de 65°.

Com estas informações $AB = 2$km, $B\widehat{A}C = 85°$ e $A\widehat{B}C = 65°$.

Nesse momento o construtor notou que com os dados que tinha não seria possível aplicar a lei dos cossenos, pois precisaria das medidas de dois lados e ele tinha apenas

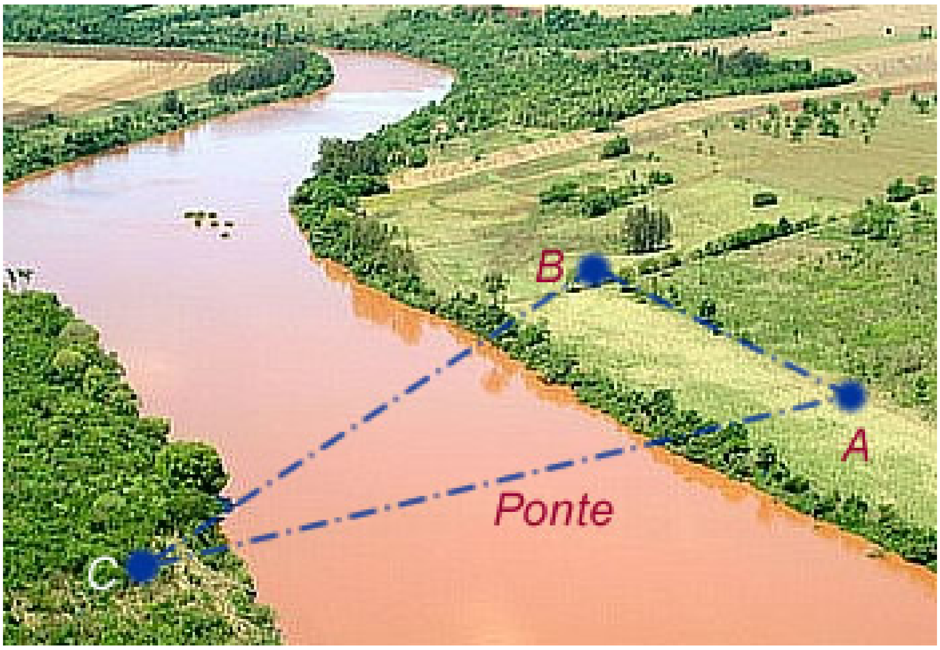

Figura 5.17: Aplicação: lei dos senos e lei dos cossenos

a medida de um lado e de dois ângulos. Assim ele aplicou a lei dos senos e determinou o comprimento da ponte.

Situação 2): O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos estes onde a ponte deveria ser construída. Entretanto, ele já conhecia as medidas dos segmentos AB e BC. A medida do segmento AB era igual a 2km e a medida do segmento BC era 3,99km. Utilizou novamente a ferramenta de medir ângulos e obteve que o ângulo do vértice B era igual a 65°. Com estas informações ele obteve $AB = 2$km, $BC = 3,99$km e $\widehat{B} = 65°$.

De modo análogo à situação 1, o construtor ficou atento às informações conhecidas que eram as medidas de dois lados e apenas um ângulo, fazendo com que ele aplicasse a lei dos cossenos para determinar o comprimento da ponte.

Diante dessas duas situações espera-se que os alunos notem que é necessário ficarem atentos às informações que a situação lhes passa, para que saibam qual relação devem utilizar. Esse é o ponto crucial para diferenciar essas duas leis quanto à sua aplicação.

6 Aprofundamento trigonométrico

Na maioria dos currículos das escolas, no 3° ano do ensino médio, praticamente não há uma continuidade do estudo de Trigonometria, a não ser em seu uso para resolver problemas relacionados a outros conteúdos, como por exemplo, no estudo de números complexos. Dessa forma, o conteúdo é revisto por meio de aplicações.

6.1 Aplicação dos conhecimentos de trigonometria no estudo de números complexos

Para o estudo da forma trigonométrica dos números complexos introduzimos o plano de Argand-Gauss, onde a cada número complexo $z = a + bi$, associamos um ponto $P(a, b)$ no plano cartesiano. Nesse plano podemos representar a parte real por um ponto no eixo horizontal, e a parte imaginária por um ponto no eixo vertical, denominado eixo imaginário.

A este ponto $P(a, b)$, correspondente ao complexo $z = a+bi$, chamamos de imagem ou afixo de z. Observe a representação geométrica dos números complexos na figura abaixo

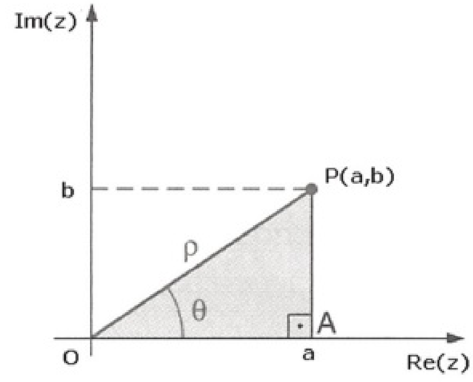

Figura 6.1: Plano de Argand-Gauss

A este plano de Argand-Gauss chamamos de plano complexo.

Na virada do século $XVIII$ para o XIX, os matemáticos Caspar Wessel, Carl Friederich Gauss e Jean Robert Argand, descobriram que os números complexos admitiam uma representação geométrica. Gauss imaginava essa representação por meio dos pontos de um plano enquanto que Wessel e Argand usavam segmentos de reta ou vetores coplanares. Como Wessel e Argand tinham pouca representatividade seus trabalhos não alcançaram a notoriedade merecida na época.

Em 1831, Gauss apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano.

Finalmente, em 1837, Sir Willian Rowan Hamilton chegou ao final dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a, b) e reescreveu as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

A distância entre o ponto $P(a, b)$ e a origem do plano, representada pelo ponto O, é chamada de módulo do número complexo $z = a + bi$, que se denota por $|z| = \rho$. Essa distância é calculada utilizando-se a seguinte fórmula: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ que decorre da aplicação do teorema de Pitágoras.

Do mesmo triângulo OAP, obtém-se também as relações

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \text{ e } \operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho}$$

.

O ângulo θ, pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$, denomina-se argumento do complexo $z = a + bi$ e é indicado por $\arg(z)$.

Após conhecidos o módulo e o argumento de um número complexo, podemos representá-lo da seguinte forma: dado o número complexo $z = a + bi$, representado pelo ponto $P(a, b)$, como $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho}$, isolando a e b nas respectivas relações e substituindo em $z = a + bi$ obtemos

$$z = \rho \cos\theta + i\rho \operatorname{sen}\theta = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

que é a forma trigonométrica ou polar do número complexo $z = a + bi$.

Em seguida, os alunos devem realizar operações entre números complexos na forma trigonométrica ou polar.

Observação: vale ressaltar que o foco dessa abordagem é o uso dos conhecimentos de trigonometria no estudo dos números complexos e, dessa forma, subentende-se que os alunos já viram os conceitos básicos do conteúdo.

6.1.1 Multiplicação de números complexos

Considere os números complexos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$.

Efetuando a multiplicação de z_1 e z_2 obtemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

.

Portanto, para efetuar a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica basta multiplicar os módulos e somar os argumentos.

6.1.2 Divisão de números complexos

Considere os números complexos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, com $z_2 \neq 0$.

Efetuando a divisão de z_1 por z_2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}\frac{\rho_2(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}{\rho_2(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - i^2\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}{\rho_2\rho_2(\cos^2\theta_2 - i^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_2)} . \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, para efetuar a divisão de números complexos, basta dividir os módulos e subtrair os argumentos dos complexos.

6.1.3 Potenciação de números complexos

Considere o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Como $z^2 = z \cdot z$ podemos utilizar a fórmula da multiplicação para obter

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta)).$$

Analogamente, escrevendo $z^3 = z^2 \cdot z$ obtemos

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + i\,\mathrm{sen}(3\theta)).$$

Continuando esse raciocínio obteremos

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + i\,\mathrm{sen}(4\theta)),$$

$$z^5 = \rho^5(\cos(5\theta) + i\,\mathrm{sen}(5\theta)),$$

$$z^6 = \rho^6(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta))$$

e assim sucessivamente.

Dessa forma, podemos observar que cada resultado apresenta o módulo ρ elevado ao expoente de z e o argumento θ multiplicado por esse expoente. Logo, espera-se que os alunos consigam generalizar estes resultados para comparar com o teorema demonstrado pelo matemático francês Abraham de Moivre.

Teorema 6.1 (Teorema de De Moivre). *Se $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n um inteiro, então: $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$.*

6.1.4 Radiciação de números complexos

Nesse momento é importante relembrar que a radiciação é uma potenciação onde o expoente é um número fracionário.

Assim, a raiz enésima do número complexo $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ é dada por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}), k \in \mathbb{Z}.$$

Essa fórmula é conhecida como segunda fórmula de De Moivre.

É importante que os alunos notem que se obtém n raízes distintas quando $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ pois a partir de $k = n$ as raízes se repetirão.

Abraham de Moivre nasceu em 26 de maio de 1667 em Vitry-le-François, em Champagne na França. Era um matemático famoso pela fórmula de Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria e pelo seu trabalho na distribuição normal e na teoria das probabilidades. Foi eleito membro da Royal Society em 1697 e era amigo de Isaac Newton e Edmund Halley. Morreu em 27 de novembro de 1754 em Londres.

6.2 Retomada de conteúdo e mais aplicações da trigonometria

Para retomarmos as definições, propriedades, características e relações usuais da trigonometria, podemos fazer uma abordagem das aplicações da trigonometria em situações reais e/ou hipotéticas que estejam inseridas em algum contexto.

Vamos analisar mais algumas aplicações da trigonometria:

6.2.1 I- O uso da trigonometria na medicina (Exemplo retirado do site www.matematica.com.br)

Uma das aplicações da função trigonométrica na medicina é evidenciada na análise e estudo da frequência cardíaca, isto é, do número de batimentos cardíacos num determinado intervalo de tempo, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto). Desta análise, podemos verificar a pressão arterial de uma pessoa.

O sangue bombeado pelo coração é transportado para todos os tecidos e órgãos do corpo humano através de vasos chamados de artérias. A pressão arterial ou sanguínea é a força que o sangue exerce sobre as paredes das artérias.

E como são definidos os valores da pressão arterial?

A pressão arterial atinge o seu valor máximo quando o coração se contrai e bombeia o sangue (pressão sistólica) e atinge o valor mínimo (pressão diastólica) quando o coração está em repouso, num intervalo de tempo de um batimento cardíaco. A pressão sanguínea é sempre dada pelos valores: das pressões sistólica e diastólica e ambas são importantes. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80mmHg, onde o primeiro valor é a pressão sistólica (valor mais alto) e o segundo valor é a pressão diastólica (valor mais baixo).

Observando o gráfico seguinte, representado num monitor médico, a variação da pressão sanguínea (em mmHg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é um gráfico de função trigonométrica cuja lei é dada por: $P(t) = 100 - 20\cos(\frac{8\cdot\pi}{3}\cdot t)$, onde o valor do argumento $(\frac{8\cdot\pi}{3}\cdot t)$ é dado em radianos.

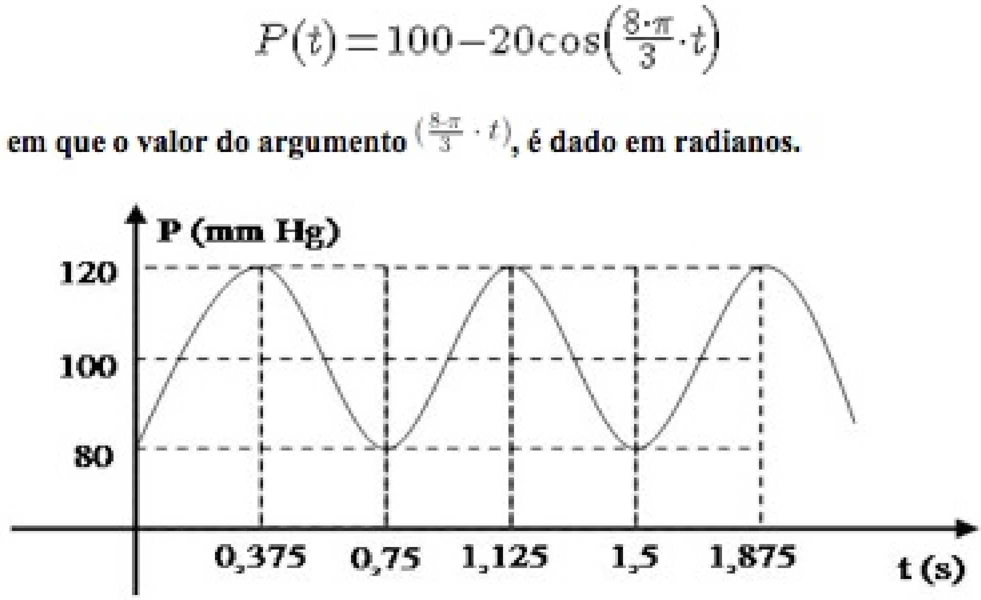

Figura 6.2: Gráfico: pressão sanguínea × tempo

O intervalo de tempo de um batimento cardíaco dessa pessoa é $0,75$s, que corresponde a um ciclo completo, ou seja, o período dessa função 3/4 radianos.

Esta pessoa possui a frequência cardíaca igual a 80 bpm (60 s : $0,75$s).

A pressão arterial desse indivíduo é 120 mmHg por 80 mmHg (ou 12 por 8, como é conhecida popularmente).

6.2.2 II- O uso da trigonometria na engenharia e topografia

A trigonometria é de grande utilidade na medição de distâncias inacessíveis ao ser humano, como a altura de montanhas, torres e árvores, ou a largura de rios e lagos.

Dessa forma, vejamos algumas atividades que retomem os conhecimentos já adquiridos pelos alunos ao longo dos anos que estudaram esse conteúdo.

1- Qual a altura h do poste na figura abaixo?

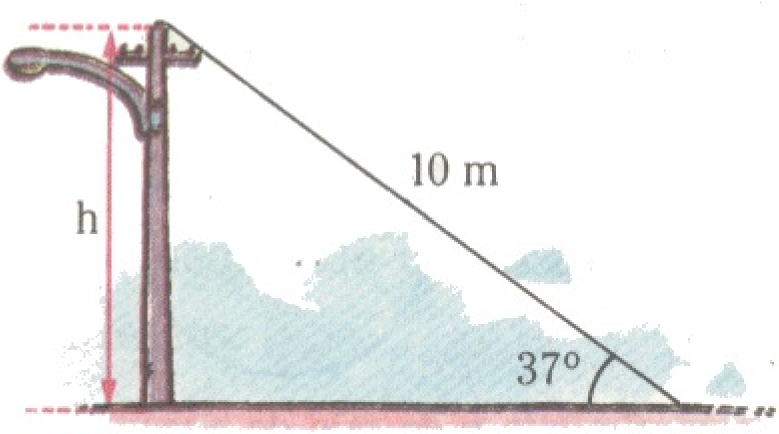

Figura 6.3: Cálculo de altura 1

2- A determinação feita por radares da altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que evitem turbulências. Nessas condições, determine a altura das nuvens detectadas pelos radares conforme o desenho a seguir. (use $\operatorname{sen} 4° = 0,07$ e $\cos 4° = 0,99$

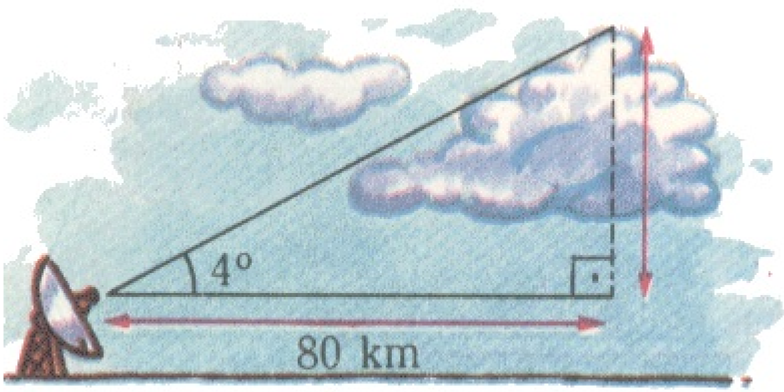

Figura 6.4: Cálculo de altura 2

3- A uma distância de 80m, uma torre é vista sob um ângulo $\hat{\alpha}$, como nos mostra a figura. Calcule a altura h da torre se $\hat{\alpha} = 15°$

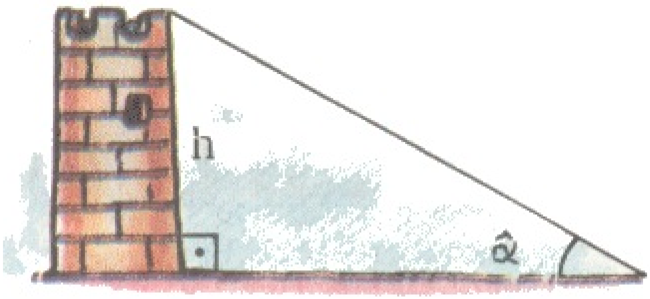

Figura 6.5: Cálculo de altura 3

4- Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo $A\widehat{C}B = 30°$. Sabendo que o ângulo $C\widehat{A}B$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule as distâncias, em milhas, do ponto A ao farol e do ponto B ao farol.

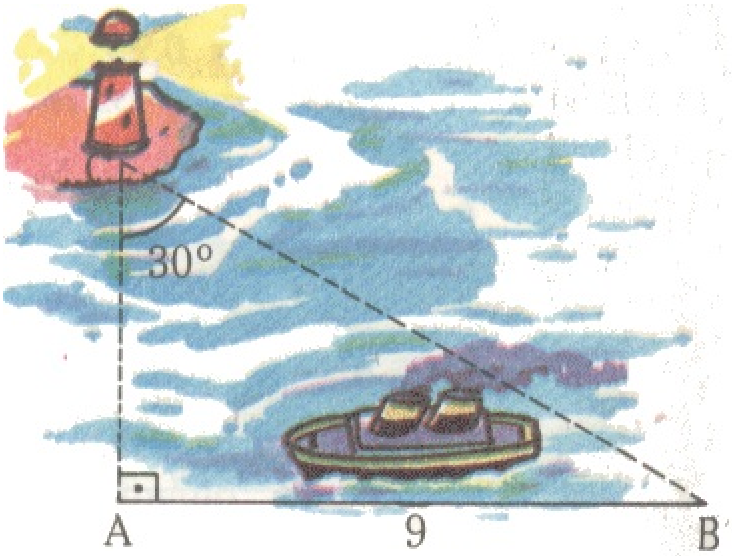

Figura 6.6: Cálculo de distância 1

5- Um navio se encontra num ponto A, distante 10 milhas de um farol F. No mesmo instante, um outro navio se encontra num ponto B, distante 15 milhas do mesmo farol F. Um observador, estando no farol F, vê os dois navios sob um ângulo de visão de $60°$. Qual é a distância entre os navios nesse instante?

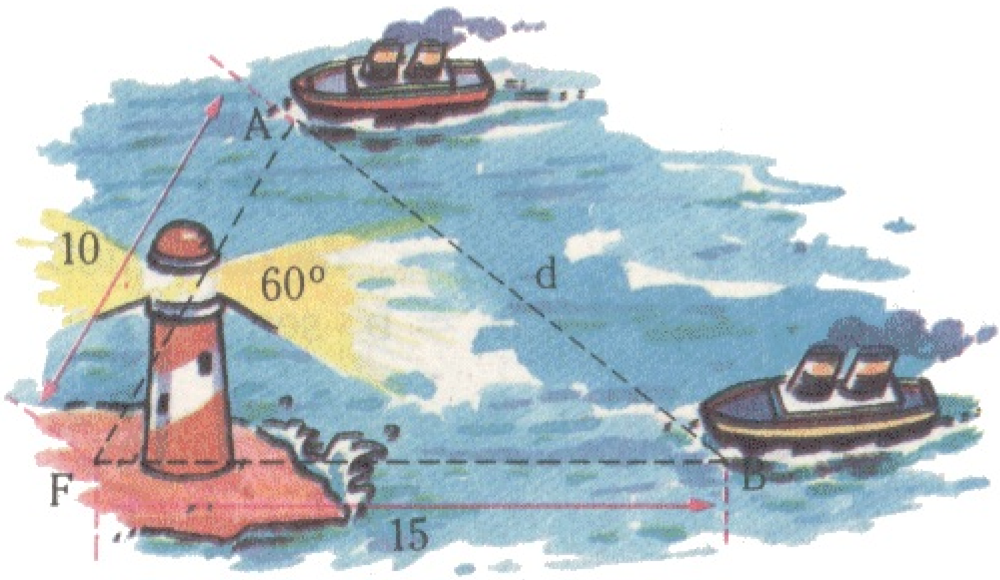

Figura 6.7: Cálculo de distância 2

6- Um avião voa numa reta horizontal de altura 10km em relação a um observador P, situado na projeção ortogonal da trajetória. No instante t_1, o avião é visto sob um ângulo de 60° e no instante t_2, sob um ângulo de 30°. Qual é a distância percorrida pelo avião no intervalo t_1 até t_2?

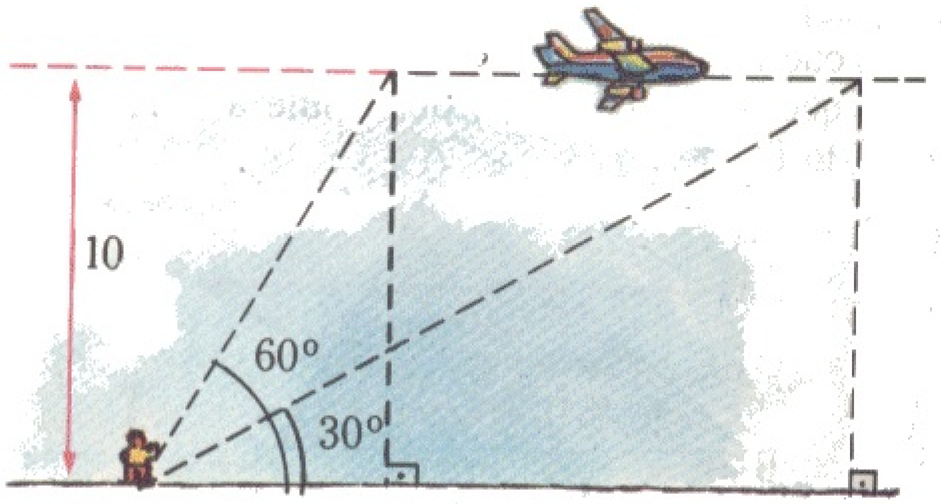

Figura 6.8: Cálculo de distância 3

6.2.3 III- O uso da trigonometria na Física

O uso da trigonometria está presente em muitos conteúdos estudados em Física. Sendo assim, é pertinente citar algumas dessas atividades.

III.1- Lançamento oblíquo

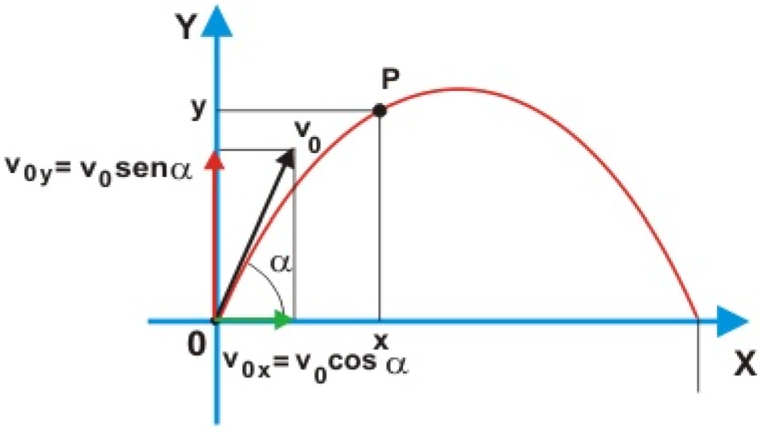

Figura 6.9: Lançamento oblíquo

No lançamento oblíquo é usada a relação seno e cosseno para descobrir os vetores v_{0x} e v_{0y} que representam a decomposição de v_0 nos eixos x e y, respectivamente.

III.2- Plano inclinado

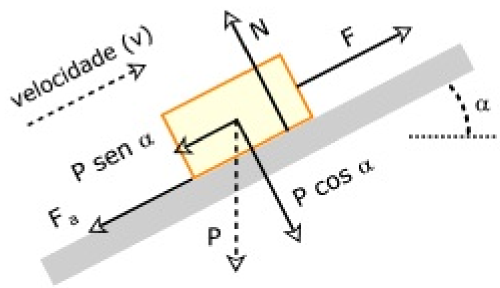

Figura 6.10: Plano inclinado

Novamente as relações seno e cosseno são usadas para decompor um vetor, nesse caso o peso.

III.3- Refração da luz

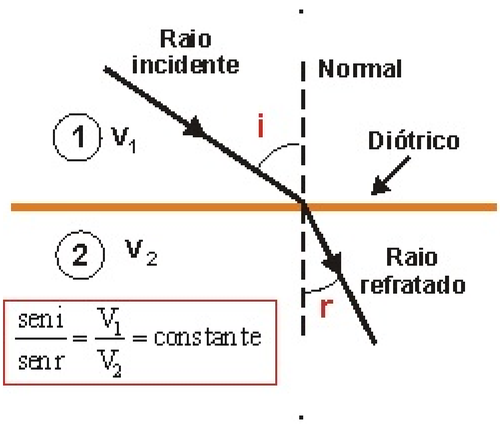

Figura 6.11: Refração da luz

Como mostra essa figura, os ângulos de incidência i, e de refração r, não são iguais entre si, pode-se verificar experimentalmente que aumentando o ângulo i, o ângulo r também aumenta na mesma proporção. Durante séculos tentou-se descobrir uma relação entre estes ângulos, quando finalmente em 1620, o matemático Snell, fazendo inúmeras medidas de ângulos e analisando-as, chegou a uma célebre conclusão de que havia uma relação constante entre os senos desses ângulos, em outras palavras, sendo V_1 a velocidade do raio incidente no meio 1 e V_2 a velocidade do raio incidente no meio 2, Snell descobriu que quando a luz se refrata ao passar de um meio para outro tem-se:

$$V_1.\operatorname{sen}(r) = V_2.\operatorname{sen}(i).$$

III.4- Ondulatória

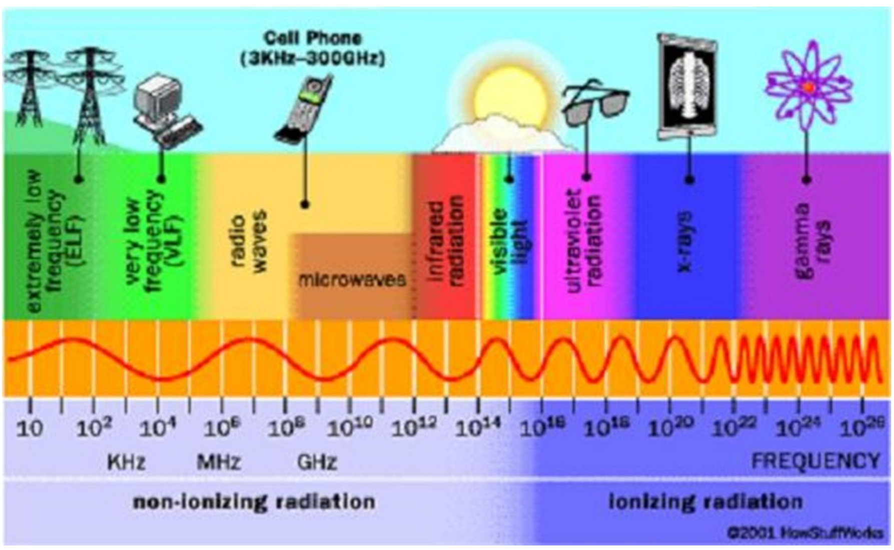

Figura 6.12: Ondulatória

Note que em todas ondas da figura há uma periodicidade tratando-se de uma função trigonométrica do tipo $y = a + b\,\text{sen}(cx + d)$.

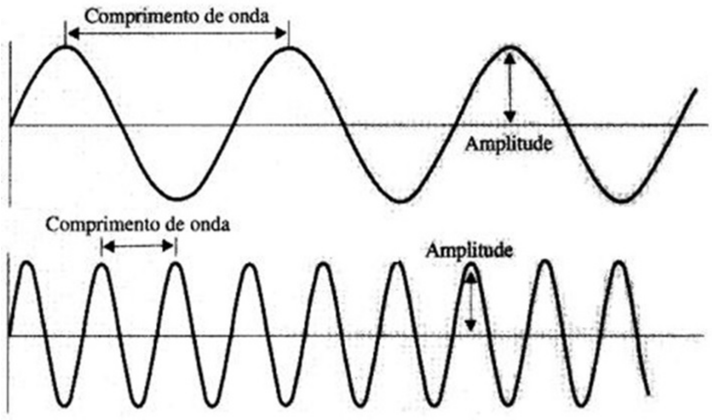

Figura 6.13: Ondas

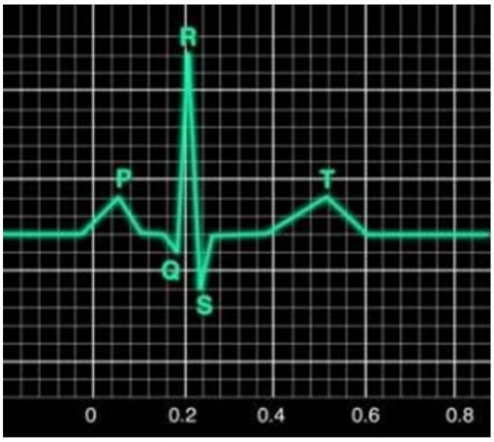

Figura 6.14: Eletrocardiograma

De forma geral, as funções trigonométricas são usadas em fenômenos periódicos.

Considerando que esses alunos estão no final do ensino médio e que muitos farão uma importante escolha que é a do curso de graduação que querem fazer, é de extrema importância que os alunos compreendam que a trigonometria é usada em diversos contextos e, por isso, em inúmeras profissões.

7 Conclusão

Neste trabalho abordamos o aprofundamento do ensino de trigonometria de forma gradativa ao longo do último ano do ensino fundamental até o final do ensino médio de acordo com o currículo básico de educação.

No entanto, além da abordagem "*tradicional*", já conhecida no meio de trabalho escolar, das definições e propriedades, houve uma proposta de abordagem histórica com fragmentos de fatos e curiosidades ocorridas no decorrer do desenvolvimento desses conteúdos, bem como algumas aplicações contemporâneas dessas ferramentas. Além disso, foi possível formular uma proposta que insira o aluno no contexto de sistematização e construção de alguns conceitos com auxílio de softwares matemáticos que manipulam informações, dados, medidas etc., tornando o levantamento de conjecturas mais acessível e rápido, ajudando na formalização e demonstração de tais conceitos.

Esse foco na reflexão e construção de conhecimentos no contexto da Trigonometria, propicia aos alunos a oportunidade de: investigar, observar, analisar e delinear conclusões testando-as na resolução de problemas, formando uma visão ampla e científica da realidade.

Vimos que o estudo das razões trigonométricas, as leis do seno e cosseno, bem como suas aplicações são muito úteis para calcular distâncias inacessíveis. Já o estudo dessas razões para arcos maiores que $90°$ ampliou esses conceitos, pois a trigonometria foi abordada em toda a circunferência e não apenas no triângulo retângulo, conhecendo também uma nova medida de ângulo: o radiano.

Na construção, leitura e interpretação de gráficos das funções trigonométricas utilizamos procedimentos e ferramentas tecnológicas para agilizar a visualização das representações gráficas e, com isso, as conclusões. Espera-se que, com essa atividade, os alunos sejam capazes de modelar alguns problemas práticos que envolvam comportamentos periódicos, uma vez que as funções circulares são periódicas e podem representar fenômenos naturais periódicos, como a variação da temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, a pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos, etc; e esses fenômenos periódicos podem ser descritos por funções cujos gráficos são denominados senóides.

Sequencialmente, fizemos uma abordagem das relações e identidades trigonométricas e esperamos que os alunos sejam capazes de resolver equações e inequações trigonométricas. Além disso, utilizamos recursos gráficos, software Geogebra, para que os alunos manipulem os vértices do triângulo e analisem as medidas dos ângulos e lados e suas variações para checarem a veracidade da lei dos senos e da lei dos cossenos.

Em seguida, apresentamos o uso da trigonometria no estudo de números complexos, tornando algumas operações (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) mais acessíveis e práticas, uma vez que os números complexos podem ser escritos na forma trigonométrica e, dessa forma, os alunos podem utilizar as definições e propriedades da trigonometria que já foram estudadas.

Por fim, exemplificamos algumas aplicações da trigonometria em áreas como medicina, engenharia, topografia e Física, mas o intuito não foi apenas de retomar o conteúdo já estudado, mas também de mostrar que a matemática, e em particular a trigonometria, está presente em diversas áreas e profissões, levando em consideração que esses alunos estão no momento de escolha da carreira profissional.

Portanto, vale salientar que o estudo de trigonometria pode ser desenvolvido de maneira interessante, interativa e significante para os alunos em todos os níveis de escolaridade.

Referências

[1] PIMENTA, S. G. *O Estágio na formação de professores: unidade teoria e prática?* 5. ed. São Paulo: [s.n.], 2002.

[2] BARBOSA, A. *Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas às razões e às funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista*. Tese (Doutorado) — PUC/SP, 2009.

[3] BORGES, C. F. *Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para o ensino*. Tese (Doutorado) — PUC/SP, 2009.

[4] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: [s.n.], 1996.

[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP.

[6] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[7] MENDES, I. A. *Ensino de trigonometria através de atividades históricas*. Tese (Doutorado) — UFRN, 1997.

[8] MENDES, I. A. *Ensino de Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática*. Tese (Doutorado) — UFRN, 2001.

[9] SILVA, S. A. *Trigonometria no Triângulo Retângulo: Construindo uma Aprendizagem Significativa*. Tese (Doutorado) — PUC/SP, 2005.